Ing. HECTOR J. MEDICI

Diplomado en Matemáticas y Cosmografía. Ex-Profesor adscripto de análisis matemático 1er. curso del I. N. P. S., del Colegio Militar de la Nación, de la Escuela N. M. Acosta y de la Fac. de Ingeniería de Buenos Aires.

Ing. EMANUEL S. CABRERA

Diplomado en Matemáticas y Cosmografía, Ex-Profesor adscripto a la cátedra de Geometría Métrica del I. N. P. S. y de las Escuelas de Comercio Nº 8 y 14

3150 EJERCICIOS DE ÁLGEBRA

SEGUNDO CURSO

OBRAS DE LOS AUTORES

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA REPÚBLICA ARGENTINA.

GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL PLANO	Cursos Técnicos y Universitarios.
GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL ESPACIO	Cursos Técnicos y Universitarios.
MAT. TÉCNICA I. (GEOM. ARIT. ALG.)	Escuelas Industriales
LA REGLA DE CÁLCULO.	Cursos Técnicos y Universitarios

Ciclo básico común al Bachillerato, Magisterio y Escuelas de Comercio.

MATEMÁTICAS. (ARIT. Y GEOM.)	Primer Curso.
MATEMÁTICAS. (ARIT. Y GEOM.)	Segundo Curso.
MATEMÁTICAS. (ALGEBRA Y GEOM.)	Tercer Curso.

Ciclo Superior del Bachillerato, Magisterio y Escuelas de Comercio.

ARITMÉTICA Y ALGEBRA c/tabla.	4° año del Bachillerato y Escuel. Normales
MATEMÁTICAS (ARIT. ALG. GEOM. c/t.)	4° año de las Escuelas de Comercio.
SUPERFICIES Y VOLÚMENES.	4° año de las Escuelas de Comercio.
GEOMETRÍA DEL ESPACIO.	4° año del Bachillerato y 5° de las Escuelas Normales.
ELEMEN. DE TRIGONOMETRÍA c/tabla.	5° año del Bachillerato.
ELEMENTOS DE COSMOGRAFÍA.	5° año del Bachillerato.
MATEMÁTICA FINANCIERA c/tabla.	5° año de las Escuelas de Comercio.

3650 EJERCICIOS DE ARITMÉTICA I Y CÁLCULO PRÁCTICO.
2600 EJERCICIOS DE ARITMÉTICA II Y CÁLCULO PRÁCTICO.
2500 EJERCICIOS DE ALGEBRA. Primer curso.
3150 EJERCICIOS DE ALGEBRA. Segundo curso.
1350 EJERCICIOS DE TRIGONOMETRÍA.
700 EJERCICIOS DE GEOMETRÍA DEL ESPACIO.
TABLA DE LOGARITMOS DECIMALES.
TABLA DE LOGARITMOS DECIMALES DE NÚMEROS Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.
TABLA FINANCIERA.

Es propiedad de los autores.
Se ha hecho el depósito q
marca la ley.
Copyright by E. S. Cabrera
y H. J. Medici.

INDICE

Valor numérico de radicales	Pág.	5
Propiedades del valor aritmético	»	8
Simplificación de radicales	»	11
Reducción a mínimo común índice	»	13
Extracción de factores de un radical	»	16
Introducción de factores en un radical	»	19
Suma y resta de radicales	»	20
Multiplicación de radicales	»	22
División de radicales	»	22
Racionalización de fracciones	»	26
Potencias de exponente fraccionario	»	31
Logaritmos: definición y ejemplos	»	41
Propiedades de los logaritmos	»	46
Manejo de tablas	»	50
Cologaritmo	»	54
Cálculo de productos, cocientes, potencias y raíces	»	56
Progresiones aritméticas: ejercicios y problemas	»	65
Progresiones geométricas: ejercicios y problemas	»	79
Cuestiones de Algebra Financiera	»	97
Números complejos: igualdad, suma y resta	»	101
Multiplicación y división de complejos	»	105
Potencias de la unidad imaginaria	»	108
Potencias de exponente natural de números complejos	»	108
Raíces cuadradas de un número real negativo	»	110
Ecuaciones reducidas de segundo grado	»	112
Ecuaciones generales	»	123
Reconstrucción de una ecuación	»	130
Ecuaciones bicuadradas	»	134
Problemas de segundo grado con una incógnita	»	141
Representación gráfica de funciones	»	153
Resolución analítica y gráfica de sistemas de segundo grado	»	170
Análisis Combinatorio	»	173
Binomio de Newton	»	190
APENDICE	»	205

RADICALES (*)

La sencilla notación empleada para representar a un radical, con la que están familiarizados los alumnos desde la iniciación de sus estudios de Aritmética, tiene la ventaja, como dice A. De Morgan, respecto de todos los simbolismos fáciles de manejar, "que permite a los que no son grandes matemáticos en su generación, hacer razonamientos que hubieran desconcertado a sus mayores predecesores."

Efectivamente: es fácil darse cuenta de las dificultades que presentarían la demostración de las propiedades y la realización de operaciones con radicales, si empleáramos las notaciones utilizadas antiguamente según las cuales para representar por ejemplo a $\sqrt{9}$ tendríamos que escribir

Radix 9, o R 9, o R^2 9, o $R_{\square}$ 9, o R q 9, y para $\sqrt[3]{9}$

R^3 9, o R 3^a 9, o cu R 9, o R c 9, y para $\sqrt[4]{9}$

escribir R^4 9, o $R_{\square\square}$ 9, o $\sqrt{\sqrt{9}}$ . . . etc.

o si el radical doble $\sqrt{\sqrt[3]{108}+10}$ lo escribiéramos como Cardano (año 1539), así:

R V cu R 108 p 10

empleando las letras R y V, que se leen *radix universalis*, para indicar que la raíz cuadrada se extiende al resultado de las operaciones que siguen a la V. Es digno de admiración que los matemáticos italianos de principios del siglo XVI llegaron a probar que la ecuación $x^3 + px = q$, que representaban con la frase *cubo y cosa igual a número*, admite la solución

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

y uno de ellos, Tartaglia, expresara en verso ese resultado.

Calcular el valor aritmético de:

1. $\sqrt{2x} + \sqrt[3]{5y}$ **para** $x = 18$ **,** $y = 200$ **R: 16**

2. $5\sqrt{a+h}$ **para** $a = 50$ **;** $h = 31$ **R: 45**

(*) En el APÉNDICE págs. 205 a 211, se tratan: *Descomposición de radicales cuadráticos dobles; Transformación de binomios de términos irracionales cuadráticos en un radical único* y *Racionalización de denominadores del tipo*

$$\sqrt[m]{x} \pm \sqrt[m]{a} \quad \text{para} \quad m > 2.$$

3. $\sqrt{a+x+y}+\sqrt{ax+h}$ para $a=3$; $x=5$; $y=1$; $h=10$ R: 8

4. $3\sqrt[3]{a.b}\;\sqrt{a}$ para $a=9$; $b=3$ R: 27

5. $\sqrt{\frac{a}{3b}+b}$ para $a=42$; $b=2$ R: 3

6. $\sqrt{\frac{b}{c}+c}+\sqrt[3]{\frac{b}{c}+h}$ para $b=18$; $c=3$; $h=2$ R: 5

7. $\sqrt[3]{a^2bc+c^2}$ para $a=2$; $b=3$; $c=4$ R: 4

8. $\sqrt{a^2+2bc}$ para $a=4$; $b=3$; $c=-2$ R: 2

9. $\sqrt{(a^2+x^2)^2-4a^2x^2}$ para $a=13$; $x=12$ R: 25

10. $\frac{m}{\sqrt{a+m}}$ para $m=20$; $a=5$ R: 4

11. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a}{x}}$ para $a=16$; $x=2$ R: 2

12. $-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ para $p=7$; $q=10$ R: -2

13. $\sqrt{\frac{1}{a+b}}+\sqrt{\frac{2c}{3b}}$ para $a=6$; $b=3$; $c=2$ R: 1

14. $\sqrt{\frac{25}{xy}}+\sqrt[3]{\frac{64}{x+z}}$ para $x=y=5$; $z=3$ R: 3

15. $\sqrt{a+b+c}\;\sqrt{c-b-a}\;\sqrt{2a+b^2+c^2}$ para $a=1$; $b=3$; $c=5$ R: 18

16. $\sqrt[3]{\frac{x^5}{5}+\frac{3}{y}+h}$ para $x=2$; $y=5$; $h=20$ R: 3

17. $\sqrt{\frac{a^2}{2b}}-\sqrt[3]{\frac{49}{c}+1}$ para $a=6$; $b=2$; $c=7$ R: 1

18. $\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)(a+c-b)}}$ para $a=5$; $b=4$; $c=3$ R: $\sqrt{2}$

19. $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ para $a=8$; $b=2$ y $c=-3$ R: $\frac{1}{2}$

20. $\sqrt{\frac{3a^2b}{2}+\frac{2a}{b}}-2\sqrt{2ab^2-3ab+9}$ para $a=2$; $b=4$ R: -9

21. $\sqrt{a\sqrt{x}}$ para $a=9$; $x=16$ R: 6

22. $2\sqrt{4d+\sqrt{3d+5h}}$ para $d=5$; $h=2$ R: 10

23. $\left(\sqrt{\frac{x}{y}+10}\right)^3$ para $x=42$; $y=7$ R: 64

24 $2\sqrt[3]{\sqrt{3a+b}}$ para $a=20$; $b=4$ R: 4

25. $\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[5]{x-b}+3}$ para $b=30$; $x=31$ R: 1

26. $\sqrt{\frac{3b+c}{c-b}}-\frac{\sqrt[3]{9b+7c-12}}{c-b}$ para $b=3$; $c=7$ R: 1

27. $\sqrt[3]{\sqrt{a+b}}$ para $a=60$; $b=4$ R: 2

28. $\sqrt[3]{2ab^2}$ para $a=-5$; $b=10$ R: -10

29. $\sqrt{3-2x^2}-\frac{8}{3}$ para $x=-\frac{1}{3}$ R: -1

30. $\sqrt[5]{2ab+c}$ para $a=-3$; $b=5$; $c=-2$ R: -2

31. $2\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3}$ para $a=-3$; $b=-4$; $c=-5$ R: 4

32. $\frac{\sqrt{a^2+2bc}}{a}+\frac{\sqrt{b^2+ac}}{b}+\frac{\sqrt{c^2+ab}}{c}$

para $a=4$; $b=3$; $c=-2$ R: $-\frac{7}{6}$

33. $\frac{a\left(\sqrt{5}+\sqrt{c}\right)}{\sqrt{b^2-a^2+12}}$ para $a=-4$; $b=-3$; $c=5$ R: -8

34. $(\sqrt{x.y})^3$ para $x=\frac{1}{20}$; $y=5$ R: $\frac{1}{8}$

35. $\sqrt[3]{xy}$ para $x=\frac{1}{243}$; $y=\frac{1}{3}$ R: $\frac{1}{9}$

36. $\sqrt[3]{\sqrt{mh}}$ para $h=\frac{1}{243}$; $m=\frac{1}{3}$ R: $\frac{1}{3}$

37. $\frac{b}{\sqrt{a.b}}$ para $a=-36$; $b=-\frac{1}{9}$ R: $-\frac{1}{18}$

38 $\sqrt{a+b}+\sqrt[4]{c}$ para $a=\frac{1}{16}$; $b=\frac{1}{9}$; $c=0{,}0016$ R: $\frac{37}{60}$

39. $\sqrt{2a+\frac{b}{2}+c}$ para $a = 10$; $b = 14$; $c = -2$ R: 5

40. $\sqrt{a^2-2b}+\sqrt{a^2+2b+2}$ para $a = 3$; $b = \frac{5}{2}$ R: 6

41. $\sqrt{\frac{1}{a^2-2b}}+\sqrt{\frac{1}{a^2+2b+2}}$ para $a = 3$; $b = \frac{5}{2}$ R: $\frac{3}{4}$

42. $2\sqrt{db}+\sqrt[3]{bc-7}$ para $b = \frac{1}{5}$; $c = -100$; $d = 20$ R: 1

43. $\frac{c\sqrt{c^2+1}}{b\sqrt{a^2+9}}$ para $a = 4$; $b = -\frac{1}{5}$; $c = \frac{3}{4}$ R: $-\frac{15}{16}$

44. $\sqrt{a^8 \cdot b^8}$ para $a = -0{,}2$; $b = -5$ R: 1

45. $(\sqrt[3]{xz})^2$ para $x = 0{,}9$; $z = 0{,}03$ R: 0,09

46. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a\,b^2}}}$ para $a = 1$, $b = 16$ R: 2

47. $\frac{a}{\sqrt[3]{b}}$ para $a = 0{,}3$, $b = \frac{-8}{27}$ R: $-\frac{0{,}9}{2}$

48. $2\sqrt{x^2+\sqrt{5br}}$ para $x=4$; $b=\frac{1}{5}$; $r=81$ R: 10

49. $\sqrt{(ab)^3}$ para $a = \frac{3}{4}$; $b = \frac{12}{6{,}25}$ R: 1,728

50. $abh\sqrt{2ch}$ para $a = 0{,}4$; $b = 25$; $h = 0{,}1$; $c = 9{,}8$ R: 1,4

Propiedades del valor aritmético de los radicales. — *Poner bajo un solo signo radical las siguientes expresiones:*

1. $\sqrt{\sqrt{3}}$ R: $\sqrt[4]{3}$

2. $\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$ R: $\sqrt{\frac{ab}{c}}$

3. $\frac{\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{x^2}}$ R: $\sqrt[3]{\frac{bc}{x^2}}$

4. $x\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}$ R: $\sqrt[3]{x^4}$

5. $\frac{3\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}}$ R: $\sqrt[3]{\frac{27}{a}}$

6. $\frac{\sqrt[3]{b\sqrt[4]{c}}}{\sqrt[4]{h}}$ R: $\sqrt[12]{\frac{b^4c}{h^3}}$

7. $\frac{a\sqrt{xy}\,\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[5]{2a}\,\sqrt[6]{c^5}}$ R: $\sqrt[30]{\frac{a^{44}x^{25}y^{15}}{64\,c^{25}}}$

8. $\sqrt{\sqrt[4]{ab}}\cdot\sqrt[12]{\frac{1}{a}}$ R: $\sqrt[24]{ab^3}$

9. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^3c}}\cdot\sqrt[9]{\frac{a^2}{c^2}}$ R: $\sqrt[9]{\frac{x^3a^2}{c}}$

10. $\sqrt{\sqrt[5]{ax^2c^3}}:\sqrt{\sqrt[5]{acx}}$ R: $\sqrt[10]{c^2x}$

11. $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}:\sqrt[9]{9}$ R: $\sqrt[9]{9}$

12. $\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{y}{x}}}$ R: $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$

13. $\sqrt[3]{(a+b)\sqrt{a+b}}$ R: $\sqrt{a+b}$

14. $\sqrt{\frac{1}{a}\sqrt{a\sqrt{a}}}$ R: $\sqrt[8]{\frac{1}{a}}$

15. $\sqrt{\sqrt[3]{a^2-2ab+b^2}}$ R: $\sqrt[3]{a-b}$

16. $\sqrt[3]{\sqrt{a^3+3a^2+3a+1}}$ R: $\sqrt{a+1}$

17. $\sqrt{b\sqrt{\frac{1}{b}\sqrt{h}}}:\sqrt[4]{\sqrt{\frac{b^3}{h^2}}}$ R: $\sqrt[8]{\frac{h^4}{b}}$

18. $\sqrt[3]{\sqrt{2\sqrt{4x}}}$ R: $\sqrt[12]{16x}$

19. $\sqrt{2a\sqrt{3b\sqrt{2a\sqrt{b}}}}$ R: $\sqrt[16]{2^{10}\cdot 3^4\cdot a^{10}\cdot b^5}$

20. $\sqrt[3]{x^2\sqrt{x\sqrt{x^3\sqrt{x^2}}}}$ R: $\sqrt[6]{x^7}$

Solución: $\sqrt[3]{\sqrt{x^2\sqrt{x\sqrt{x^4}}}} = \sqrt[3]{\sqrt{x^2\sqrt{x^3}}} = \sqrt[3]{\sqrt{x^7}} = \sqrt[6]{x^7}$

Calcular las potencias y raíces siguientes:

1. $\sqrt[3]{-27\,a^6 b^9 c^3}$ R: $-3\,a^2 b^3 c$

2. $\left(\sqrt[3]{\sqrt{b^5 x^2 z}}\right)^6$ R: $b^5 x^2 z$

3. $\left(\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{a^3 b^3}}}}\right)^6$ R: $a\,b$

4. $\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)^4$ R: 16

5. $\left(\sqrt{2\sqrt{a}}\right)^4$ R: $4\,a$

6. $\sqrt[3]{(8\,a^3 b^6)^2}$ R: $4\,a^2 b^4$

7. $\left(\sqrt[4]{0{,}01\,a^2 b^4 c^6}\right)^2$ R: $0{,}1\,ab^2c^3$

8. $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{-2}$ R: 2

9. $\left(\sqrt[3]{3^{-1}}\right)^{-3}$ R: 3

10. $\left[\left(\sqrt[4]{0{,}1\,a^2 b^4}\right)^{-2}\right]^2$ R: $10\,a^{-2} b^{-4}$

11. $\left(\sqrt[3]{\sqrt[7]{8\,a^3}}\right)^7$ R: $2\,a$

12. $\sqrt[3]{5a^2b \,.\, 25ab^5}$ R: $5\,a\,b^2$

13. $\sqrt{49\,a^{4m} b^{2n} c^{6p}}$ R: $7\,a^{2m} b^n c^{3p}$

14. $\sqrt[3]{-125\,a^{12} x^{15+3n}}$ R: $-5\,a^4 x^{5+n}$

15. $\sqrt[5]{\frac{-32\,x^{10}}{b^{15}}}$ R: $-2\,x^2 b^{-3}$

16. $\sqrt[4]{\frac{81\,b^8}{16\,c^4}}$ R: $\frac{3\,b^2}{2\,c}$

17. $\sqrt[4]{\frac{x^8 y^{20} z^{-4}}{(x+y)^4}}$ R: $\frac{x^2 y^5}{(x+y)\,.\,z}$

18. $\sqrt[n]{\frac{x^{2n} y^{nm}}{z^{-n}\,.\,r^{pn}}}$ R: $\frac{x^2 y^m z}{r^p}$

19. $\sqrt[5]{\frac{2^{10} x^{15} (x+y)^5}{32\,y^5 (x-y)^{10}}}$ R: $\frac{2\,x^3 (x+y)}{y\,(x-y)^2}$

20. $\sqrt{a^2 + 2\,a\,b + b^2}$ R: $a + b$

21. $\sqrt{x^2 - xy + \frac{y^2}{4}}$ R: $x - \frac{y}{2}$

Solución : $\sqrt{x^2 - 2x\,\frac{y}{2} + \left(\frac{y}{2}\right)} = \sqrt{\left(x - \frac{y}{2}\right)^2} = x - \frac{y}{2}$

22. $\sqrt{\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 2}$ R: $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$

23. $\sqrt[3]{a^3 + 3\,ab^2 + 3\,a^2 b + b^3}$ R: $a + b$

24. $\sqrt[3]{a^3 + 3\,a^2 + 3\,a + 1}$ R: $a + 1$

25. $\sqrt{16\,x^2 - 40\,xy + 25\,y^2}$ R: $4\,x - 5\,y$

26. $\sqrt[3]{-0{,}008\,a^6 b^3}$ R: $-0{,}2\,a^2 b$

27. $\sqrt{9\,\sqrt{16}}$ R: 6

28. $\sqrt{4\,\sqrt{81\,b^4}}$ R: $6\,b$

29. $\sqrt{a^3\,\sqrt{a^{-2}}}$ R: a

30. $\sqrt[5]{b^3\,\sqrt[3]{32\,b}}$ R: $\sqrt[3]{2\,b^2}$

Simplificación de radicales.

1. $\sqrt[3]{x^{33} y^{21} z^9}$ R: $x^{11} y^7 z^3$

2. $\sqrt{9\,a^4 b^2 c^{10}}$ R: $3\,a^2 bc^5$

3. $\sqrt{9\,a^{12} b^4 c^2}$ R: $3\,a^6 b^2 c$

4. $\sqrt[p]{x^{pq} x^p}$ R: x^{q+1}

5. $\sqrt[x]{a^{2x}\,3^{-x}}$ R: $\frac{1}{3}\,a^2$

6. $\sqrt[4]{9\,x^2 y^2}$ R: $\sqrt{3\,x\,y}$

7. $\sqrt[6]{27\,x^3 y^3 z^{-3}}$ R: $\sqrt{\frac{3\,x\,y}{z}}$

8. $\sqrt[50]{x^{40} y^{30} z^{10}}$ R: $\sqrt[5]{x^4 y^3 z}$

9. $\sqrt[6]{a^3 x^{12} y^3}$ R: $\sqrt{a x^4 y}$

10. $\sqrt[12]{\frac{1}{9}\,x^2 z^4 y^{-2}}$ R: $\sqrt[6]{\frac{x\,z^2}{3\,y}}$

11. $\sqrt[9]{\frac{27}{8}\,h^{12} x^3 y^6 z^9}$ R: $\sqrt[3]{\frac{3}{2}\,h^4 xy^2 z^3}$

12. $\sqrt[25]{a^{15} b^{20} c^5}$ R: $\sqrt[5]{a^3 b^4 c}$

13. $\sqrt[45]{a^{30} b^{60}}$ R: $\sqrt[3]{a^2 b^4}$

14. $\sqrt[30]{a^6 b^{12}}$ R: $\sqrt[5]{ab^2}$

15. $\sqrt[27]{8\,a^9 b^3 c^{15}}$ R: $\sqrt[9]{2\,a^3 bc^5}$

16. $\sqrt[9]{27\,(b^2 - c^2)^6 z^3}$ R: $\sqrt[3]{3(b^2-c^2)^2 z}$

17. $\sqrt[4]{a^4 : b^2}$ R: $\sqrt{a^2 : b}$

18. $\sqrt[3]{x^9 : b^3}$ R: $x^3 : b$

19. $\sqrt[36]{\frac{1}{64}\,\frac{x^{12}}{y^{24}}}$ R: $\sqrt[6]{\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{y^4}}$

20. $\sqrt[2a]{\frac{m^{8a}\,p^{4a}}{x^a}}$ R: $\sqrt{\frac{m^8\,p^4}{x}}$

21. $\sqrt[10]{\frac{3\cdot a^{20}\,b^{25}\,c^5}{5^5\,n^5\,p^{10}}}$ R: $\sqrt{\frac{3\,a^4\,b^5\,c}{5\,n\,p^2}}$

22. $\sqrt[14]{\frac{a^{21}\,b^{35}\,c^7}{n^7}}$ R: $\sqrt{\frac{a^3\,b^5\,c}{n}}$

23. $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ R: $\frac{5}{4}$

24. $\sqrt[8]{a^6}$ R: $\sqrt[4]{a^3}$

Solución del **23**: $\sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{16+9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$

25. $\sqrt[3]{8^2}$ R: 4

26. $\sqrt[4]{16^3}$ R: 8

27. $\sqrt[3]{27^4}$ R: 81

28. $\sqrt[5]{32^3}$ R: 8

29. $\sqrt[9]{8}$ R: $\sqrt[3]{2}$

30. $\sqrt[4]{25}$ R: $\sqrt{5}$

31. $\sqrt[6]{9}$ R: $\sqrt[3]{3}$

32. $\sqrt[12]{81}$ R: $\sqrt[3]{3}$

33. $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{64}\right)^8}$ R: $\frac{1}{256}$

34. $\sqrt[6]{\frac{1}{125}}$ R: $\sqrt{\frac{1}{5}}$

35. $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ R: $\sqrt{2}$

36. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{16}}$ R: $\sqrt[3]{2}$

37. $\sqrt{\sqrt[3]{4}}$ R: $\sqrt[3]{2}$

38. $\sqrt[5]{\sqrt{\frac{1}{243}}}$ R: $\sqrt{\frac{1}{3}}$

Solución del **38**: $\sqrt[5]{\sqrt{\frac{1}{243}}} = \sqrt[5]{\sqrt{\frac{1}{3^5}}} = \sqrt{\sqrt[5]{\frac{1}{3^5}}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

39. $\sqrt[3]{\sqrt{125}}$ R: $\sqrt{5}$

40. $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$ R: $x - 1$

41. $\sqrt[4]{a^2 + 2ab + b^2}$ R: $\sqrt{a+b}$

42. $\sqrt[6]{x^2 - xb + \frac{b^2}{4}}$ R: $\sqrt[3]{x - \frac{b}{2}}$

43. $\sqrt[6]{\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2}$ R: $\sqrt[3]{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}$

44. $\sqrt[4]{25\,(a^2 + 2\,ab + b^2)}$ R: $\sqrt{5\,(a+b)}$

45. $\sqrt{\frac{(x^2 - y^2)\,(x - y)}{x + y}}$ R: $x - y$

46. $\sqrt[9]{\frac{a^3 - 3\,a^2 + 3\,a - 1}{a^3 + 3\,a^2 + 3\,a + 1}}$ R: $\sqrt[3]{\frac{a-1}{a+1}}$

47. $\sqrt[x^2-y^2]{a^{x+y}\,b^{x^2+2xy+y^2}}$ R: $\sqrt[x-y]{ab^{(x+y)}}$

48. $\sqrt[a^2+2ab+b^2]{x^{(a+b)}}$ R: $\sqrt[a+b]{x}$

49. $\sqrt[a-b]{x^{a^2-b^2}}$ R: x^{a+b}

50. $\sqrt[a+b]{h^{a^2+2ab+b^2}}$ R: $h^{(a+b)}$

51. $\sqrt[(a+b)^2]{m^{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}}$ R: $m^{(a+b)}$

Reducir a mínimo común índice los siguientes radicales:

1. $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt[5]{y^3}$, $\sqrt[15]{z^2}$ R: $\sqrt[15]{x^{10}}$, $\sqrt[15]{y^9}$, $\sqrt[15]{z^2}$

2. $\sqrt[10]{a^3}$, $\sqrt[5]{b^2}$, $\sqrt{x^3}$ R: $\sqrt[10]{a^3}$, $\sqrt[10]{b^4}$, $\sqrt[10]{x^{15}}$

3. $\sqrt{b^3}$, $\sqrt[4]{c^3}$, $\sqrt[6]{d}$ R: $\sqrt[12]{b^{18}}$, $\sqrt[12]{c^9}$, $\sqrt[12]{d^2}$

4. $\sqrt[6]{a^2}$, $\sqrt[5]{b^3}$, $\sqrt[3]{c^5}$, $\sqrt[10]{d}$, $\sqrt[15]{h^2}$ R: $\sqrt[30]{a^{10}}$, $\sqrt[30]{b^{18}}$, $\sqrt[30]{c^{50}}$, $\sqrt[30]{d^3}$, $\sqrt[30]{h^4}$

5. $\sqrt[4]{h}$, $\sqrt[5]{m^3}$, $\sqrt{n}$, $\sqrt[10]{x^3}$ R: $\sqrt[20]{h^5}$, $\sqrt[20]{m^{12}}$, $\sqrt[20]{n^{10}}$, $\sqrt[20]{x^6}$

6. $\sqrt[12]{m^2}$, $\sqrt[8]{n^3}$, $\sqrt[3]{h^8}$, $\sqrt[6]{p^2}$ R: $\sqrt[24]{m^4}$, $\sqrt[24]{n^9}$, $\sqrt[24]{h^{64}}$, $\sqrt[24]{p^8}$

7. $\sqrt[3]{a^n b}$, $\sqrt{a\,b^n}$, $\sqrt[4]{a^n b^n}$ R: $\sqrt[12]{a^{4n}\,b^4}$, $\sqrt[12]{a^6\,b^{6n}}$, $\sqrt[12]{a^{3n}\,b^{3n}}$

8. $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[3]{b^x}$, $\sqrt[8]{a^x}$ R: $\sqrt[24]{a^{18}}$, $\sqrt[24]{b^{8x}}$, $\sqrt[24]{a^{3x}}$

9. $\sqrt[3]{b^y}$, $\sqrt[3]{n^{2x}}$, $\sqrt[9]{c^x}$ R: $\sqrt[9]{b^{3y}}$, $\sqrt[9]{n^{6x}}$, $\sqrt[9]{c^x}$

10. $\sqrt[6]{x^5}$, $\sqrt[3]{x^{2n}}$, $\sqrt{2x}$ R: $\sqrt[6]{x^5}$, $\sqrt[6]{x^{4n}}$, $\sqrt[6]{8x^3}$

11. $\sqrt[5]{3y}$, $\sqrt[3]{x^n}$, $\sqrt[3]{a^n}$ R: $\sqrt[15]{27y^3}$, $\sqrt[15]{x^{5n}}$, $\sqrt[15]{a^{5n}}$

12. $\sqrt[3]{abc^n}$, $\sqrt[8]{an^n}$, $\sqrt[12]{a^n m}$ R: $\sqrt[24]{a^8b^8c^{8n}}$, $\sqrt[24]{a^3n^{3n}}$, $\sqrt[24]{a^{2n}m^2}$

13. $\sqrt{mx^2}$, $\sqrt[3]{an^3}$, $\sqrt[8]{a^m n^x}$ R: $\sqrt[24]{m^{12}x^{24}}$, $\sqrt[24]{a^8n^{24}}$, $\sqrt[24]{a^{3m}n^{3x}}$

14. $\sqrt[x]{2x}$, $\sqrt[y]{3b}$ R: $\sqrt[xy]{2^y x^y}$, $\sqrt[xy]{3^x b^x}$

15. $\sqrt{am^2}$, $\sqrt[6]{bc^2d}$, $\sqrt[4]{cd^3}$ R: $\sqrt[12]{a^6m^{12}}$, $\sqrt[12]{b^2c^4d^2}$, $\sqrt[12]{c^3d^9}$

16. $\sqrt[6]{16}$, $\sqrt[12]{729}$, $\sqrt[24]{3125}$ R: $\sqrt[24]{2^{16}}$, $\sqrt[24]{3^{12}}$, $\sqrt[24]{5^5}$

17. $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt[4]{212}$ R: $\sqrt[12]{4^4}$, $\sqrt[12]{15^6}$, $\sqrt[12]{212^3}$

18. $\sqrt{512}$, $\sqrt[4]{200}$, $\sqrt[8]{815}$ R: $\sqrt[8]{512^4}$, $\sqrt[8]{200^2}$, $\sqrt[8]{815}$

19. $\sqrt[10]{243}$, $\sqrt[5]{25}$, $\sqrt[8]{702}$, $\sqrt[4]{16}$ R: $\sqrt[40]{243^4}$, $\sqrt[40]{25^8}$, $\sqrt[40]{702^5}$, $\sqrt[40]{16^{10}}$

20. $\sqrt[12]{31}$, $\sqrt[24]{0,54}$, $\sqrt[8]{2,42}$ R: $\sqrt[24]{31^2}$, $\sqrt[24]{0,54}$, $\sqrt[24]{2,42^3}$

21. $\sqrt[10]{x^5}$, $\sqrt[24]{y^{16}}$, $\sqrt[60]{z^{45}}$ R: $\sqrt[12]{x^6}$, $\sqrt[12]{y^8}$, $\sqrt[12]{z^9}$

22. $\sqrt[10]{a^2}$, $\sqrt[4]{b^3c}$, $\sqrt[8]{c^2}$ R: $\sqrt[40]{a^8}$, $\sqrt[40]{b^{30}c^{10}}$, $\sqrt[40]{c^{10}}$

23. $\sqrt{abc^2}$, $\sqrt[3]{a^2mp}$, $\sqrt[4]{p^3}$ R: $\sqrt[12]{a^6b^6c^{12}}$, $\sqrt[12]{a^8m^4p^4}$, $\sqrt[12]{p^9}$

24. $\sqrt[3]{\frac{2}{a^n}}$, $\sqrt[4]{\frac{c}{b^3}}$ R: $\sqrt[12]{\frac{16}{a^{4n}}}$, $\sqrt[12]{\frac{c^3}{b^9}}$

25. $\sqrt[a]{\frac{2}{b}}$, $\sqrt[b]{\frac{1}{c}}$, $\sqrt[c]{\frac{1}{x}}$ R: $\sqrt[abc]{\frac{2^{bc}}{b^{bc}}}$, $\sqrt[abc]{\frac{1}{c^{ac}}}$, $\sqrt[abc]{\frac{1}{x^{ab}}}$

26. $\sqrt[3]{a+b}$, $\sqrt{a^2-b^2}$, $\sqrt[8]{a-b}$ R: $\sqrt[24]{(a+b)^8}$, $\sqrt[24]{(a^2-b^2)^{12}}$, $\sqrt[24]{(a-b)^3}$

27. $\sqrt{a(1-x)^2}$, $\sqrt[3]{a^3(1+x)^2}$ R: $\sqrt[6]{a^3(1-x)^6}$, $\sqrt[6]{a^6(1+x)^4}$

28. $\sqrt[4]{a+b}$, $\sqrt[5]{a-b}$, $\sqrt{a^2-b^2}$ R: $\sqrt[20]{(a+b)^5}$, $\sqrt[20]{(a-b)^4}$, $\sqrt[20]{(a^2-b^2)^{10}}$

29. $\sqrt[6]{b(x-1)}$, $\sqrt[5]{a(x+2)}$ R: $\sqrt[30]{b^5(x-1)^5}$, $\sqrt[30]{a^6(x+2)^6}$

30. $\sqrt[8]{x^2(a-b)}$, $\sqrt[3]{y^3(a+b)}$, $\sqrt{h(a^2-b^2)}$

R: $\sqrt[24]{x^6(a-b)^3}$, $\sqrt[24]{y^{24}(a+b)^8}$, $\sqrt[24]{h^{12}(a^2-b^2)^{12}}$

31. $\sqrt[3]{a^2bc(1+x)}$, $\sqrt[4]{ab^2c^3(1-x)}$

R: $\sqrt[12]{a^8b^4c^4(1+x)^4}$, $\sqrt[12]{a^3b^6c^9(1-x)^3}$

32. $\sqrt[m]{a^3(b+c)}$, $\sqrt[n]{b^2(a-c)}$ R: $\sqrt[mn]{a^{3n}(b+c)^n}$, $\sqrt[mn]{b^{2m}(a-c)^m}$

33. $\sqrt[a]{b^2}$, $\sqrt[b]{x^3}$, $\sqrt[c]{x^4}$ R: $\sqrt[abc]{b^{2bc}}$, $\sqrt[abc]{x^{3ac}}$, $\sqrt[abc]{x^{4ab}}$

34. $\sqrt[7]{x^2+y}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt[14]{a+b}$ R: $\sqrt[14]{(x^2+y)^2}$, $\sqrt[14]{b^7}$, $\sqrt[14]{a+b}$

35. $\sqrt{a(x+y)}$, $\sqrt[4]{b^2(x-2y)}$, $\sqrt[8]{b^3(x^2+y)}$

R: $\sqrt[8]{a^4(x+y)^4}$, $\sqrt[8]{b^4(x-2y)^2}$, $\sqrt[8]{b^3(x^2+y)}$

36 $\sqrt[5]{\frac{a}{b+c}}$, $\sqrt[4]{\frac{b}{a+c}}$, $\sqrt{\frac{c}{b+a}}$

R: $\sqrt[20]{\frac{a^4}{(b+c)^4}}$, $\sqrt[20]{\frac{b^5}{(a+c)^5}}$, $\sqrt[20]{\frac{c^{10}}{(b+a)^{10}}}$

37. $\sqrt[10]{\frac{2}{a+b}}$, $\sqrt[5]{\frac{3}{a-b}}$ R: $\sqrt[10]{\frac{2}{a+b}}$, $\sqrt[10]{\frac{9}{(a-b)^2}}$

38. $\sqrt[7]{\frac{x+a}{x-a}}$, $\sqrt{\frac{b+c}{(b-c)^2}}$, $\sqrt[28]{\frac{a-c}{(a+c)^2}}$

R: $\sqrt[28]{\frac{(x+a)^4}{(x-a)^4}}$, $\sqrt[28]{\frac{(b+c)^{14}}{(b-c)^{28}}}$, $\sqrt[28]{\frac{a-c}{(a+c)^2}}$

39. $\sqrt[8]{\frac{a}{b^3}}, \sqrt[7]{\frac{a-x}{b^2}}, \sqrt{\frac{a+b}{2}}$

R: $\sqrt[56]{\left(\frac{a}{b^3}\right)^7} \cdot \sqrt[56]{\left(\frac{a-x}{b^2}\right)^8}, \sqrt[56]{\left(\frac{a+b}{2}\right)^{28}}$

40. $\sqrt[3]{\frac{1}{x+2}}, \sqrt[5]{\frac{1}{x-a}}, \sqrt[4]{\frac{2}{x^2-b}}$

R: $\sqrt[60]{\left(\frac{1}{x+2}\right)^{20}}, \sqrt[60]{\left(\frac{1}{x-a}\right)^{12}}, \sqrt[60]{\left(\frac{2}{x^2-b}\right)^{15}}$

Extraer fuera del radical todos los factores posibles.

1. $\sqrt{27}$ R: $3\sqrt{3}$
2. $\sqrt{28}$ R: $2\sqrt{7}$
3. $\sqrt{8}$ R: $2\sqrt{2}$
4. $\sqrt{128}$ R: $8\sqrt{2}$
5. $\sqrt{60}$ R: $2\sqrt{15}$
6. $\frac{3}{4}\sqrt{32}$ R: $3\sqrt{2}$
7. $3\sqrt{\frac{1}{99}}$ R: $\sqrt{\frac{1}{11}}$
8. $\sqrt[3]{32}$ R: $2\sqrt[3]{4}$
9. $\sqrt{8a^3b^5c^4}$ R: $2ab^2c^2\sqrt{2ab}$
10. $\sqrt{1944x^7y^4z^3t}$ R: $18x^3y^2z\sqrt{6xzt}$
11. $\sqrt[3]{24}$ R: $2\sqrt[3]{3}$
12. $\sqrt[3]{10000}$ R: $10\sqrt[3]{10}$
13. $\sqrt[3]{16}$ R: $2\sqrt[3]{2}$
14. $\sqrt[3]{\frac{81}{16}}$ R: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$
15. $10\sqrt[3]{1{,}6}$ R: $20\sqrt[3]{0{,}2}$
16. $\sqrt{0{,}125}$ R: $0{,}5\sqrt{0{,}5}$
17. $\sqrt[5]{8192}$ R: $4\sqrt[5]{8}$
18. $\sqrt[4]{2048}$ R: $4\sqrt[4]{8}$
19. $\sqrt[5]{64}$ R: $2\sqrt[5]{2}$
20. $\sqrt[4]{64}$ R: $2\sqrt[4]{4}$
21. $\sqrt[3]{b^3c^6d^2}$ R: $bc^2\sqrt[3]{d^2}$
22. $\sqrt[4]{x^5y^8z}$ R: $xy^2\sqrt[4]{xz}$
23. $\sqrt[3]{bc^5d^3h^6}$ R: $cdh^2\sqrt[3]{bc^2}$
24. $\sqrt{x^{2n+1}}$ R: $x^n\sqrt{x}$

25. $\sqrt[3]{25000a^7b^5c^2}$ R: $10a^2b\sqrt[3]{25ab^2c^2}$
26. $\sqrt[3]{x^{3n+2}}$ R: $x^n\sqrt[3]{x^2}$
27. $5\sqrt[3]{108x^4}$ R: $15x\sqrt[3]{4x}$
28. $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{8}{a^3}}$ R: $\sqrt{\frac{2}{a}}$
29. $\sqrt{\frac{2}{a^3}}$ R: $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{a}}$
30. $\sqrt{\frac{1}{mn^3}}$ R: $\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{mn}}$
31. $9a\sqrt[3]{\frac{5}{27}}$ R: $3a\sqrt[3]{5}$
32. $\sqrt[3]{a^3+a^4b}$ R: $a\sqrt[3]{1+ab}$
33. $\sqrt[3]{x^3(1-x)^4}$ R: $x(1-x)\sqrt[3]{1-x}$
34. $\sqrt{8(x^3-q^2x^2)}$ R: $2x\sqrt{2(x-q^2)}$
35. $\sqrt[3]{q^3+q^3b^2}$ R: $q\sqrt[3]{1+b^2}$
36. $\sqrt{4-8\sqrt{a}}$ R: $2\sqrt{1-2\sqrt{a}}$
37. $\sqrt[3]{16+8\sqrt{a}}$ R: $2\sqrt[3]{2+\sqrt{a}}$

Solución: $\sqrt[3]{8(2+\sqrt{a})} = 2\sqrt[3]{2+\sqrt{a}}$

38. $\sqrt{\frac{m^3}{4}-\frac{m^2}{4}\sqrt{2}}$ R: $\frac{m}{2}\sqrt{m-\sqrt{2}}$
39. $\sqrt{\frac{a^2x-2ax^2+x^3}{a^2+2ax+x^2}}$ R: $\frac{a-x}{a+x}\sqrt{x}$
40. $\sqrt{x^3-2x^2y+xy^2}$ R: $(x-y)\sqrt{x}$
41. $\sqrt{ax^2+2ayx+ay^2}$ R: $(x+y)\sqrt{a}$
42. $\sqrt{9m^2-18mn+9n^2}$ R: $3(m-n)$
43. $\sqrt{4a^5b^2-20a^3b^3+25ab^4}$ R: $(2a^2b-5b^2)\sqrt{a}$

Solución: $\sqrt{a(4a^4b^2-20a^2b^3+25b^4)} = \sqrt{a(2a^2b-5b^2)^2} =$

$= (2a^2b-5b^2)\sqrt{a}$

44. $\sqrt{18 a^5 b^3 + 50 a^3 b^3}$ R: $a b \sqrt{18 a^3 b + 50 a b}$

45. $\sqrt{18 a^3 b^3 c^4 + 9 a^2 b^2 c^4}$ R: $3 a b c^2 \sqrt{2 a b + 1}$

46. $\sqrt{a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3}$ R: $(a + b) \sqrt{(a + b)}$

47. $\dfrac{2}{x} \sqrt{\dfrac{x^2 + x^2 \sqrt{3}}{4}}$ R: $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$

48. $\sqrt{\dfrac{a^3 + 2 a^2 + a}{a^3 + a^2}}$ R: $\dfrac{a+1}{a} \sqrt{\dfrac{a}{a+1}}$

49. $\sqrt{\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{16}}$ R: $\dfrac{5}{12}$

50. $\sqrt{\dfrac{a^2}{36} - \dfrac{a^2}{100}}$ R: $\dfrac{2a}{15}$

51. $\sqrt{\dfrac{a^3}{9} - \dfrac{a^3}{25}}$ R: $\dfrac{4a}{15} \sqrt{a}$

52. $\dfrac{a+b}{a-b} \sqrt[3]{\dfrac{(a-b)^5}{(a+b)^4}}$ R: $\sqrt[3]{\dfrac{(a-b)^2}{a+b}}$

53. $\sqrt{\dfrac{4 a^2 + 8 a b + 4 b^2}{a b}}$ R: $\dfrac{2(a+b)}{\sqrt{a b}}$

54. $\sqrt{\dfrac{m}{n} + \dfrac{n}{m} + 2}$ R: $\dfrac{m+n}{\sqrt{m n}}$

Solución : $\sqrt{\dfrac{m^2 + n^2 + 2 m n}{m n}} = \sqrt{\dfrac{(m+n)^2}{mn}} = \dfrac{m+n}{\sqrt{m n}}$

55. $\sqrt[3]{a - b - \dfrac{3 a b (a-b)}{a^2 + a b + b^2}}$ R: $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a^2 + a b + b^2}}$

56. $\sqrt{\dfrac{m^3 - mn^2 + m^2 n - n^3}{a^7 b^3 c^5}}$ R: $\dfrac{m+n}{a^3 b c^2} \sqrt{\dfrac{m-n}{a b c}}$

Introducir dentro del radical los factores de los siguientes radicales:

1. $4\sqrt{3}$ R: $\sqrt{48}$

2. $2\sqrt{5}$ R: $\sqrt{20}$

3. $3\sqrt{2}$ R: $\sqrt{18}$

4. $2\sqrt[3]{5}$ R: $\sqrt[3]{40}$

5. $5\sqrt{2}$ R: $\sqrt{50}$

6. $10\sqrt{10}$ R: $\sqrt{1000}$

7. $9\sqrt{2}$ R: $\sqrt{162}$

8. $2\sqrt[4]{3}$ R: $\sqrt[4]{48}$

9. $3\sqrt[3]{2}$ R: $\sqrt[3]{54}$

10. $x^3\sqrt{x}$ R: $\sqrt{x^7}$

11. $a^2\sqrt[3]{b}$ R: $\sqrt[3]{a^6 b}$

12. $a^3\sqrt[4]{a}$ R: $\sqrt[4]{a^{13}}$

13. $b^3\sqrt{a x}$ R: $\sqrt{a b^6 x}$

14. $b x^2 \sqrt{c}$ R: $\sqrt{b^2 c x^4}$

15. $a^2 b^3 \sqrt[3]{x}$ R: $\sqrt[3]{a^6 b^9 x}$

16. $3 a^2 \sqrt[3]{a^2}$ R: $\sqrt[3]{27 a^8}$

17. $2 b^3 \sqrt{b}$ R: $\sqrt{4 b^7}$

18. $2\sqrt{0,05}$ R: $\sqrt{0,2}$

19. $(a+b)\sqrt{c}$ R: $\sqrt{(a^2 + 2ab + b^2)c}$

20. $\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{100}$ R: $\sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}$

21. $2 a^2 \sqrt[3]{5}$ R: $\sqrt[3]{40 a^6}$

22. $2\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}$ R: $\sqrt[3]{10}$

23. $4\sqrt[3]{\dfrac{3}{80}}$ R: $\sqrt[3]{\dfrac{12}{5}}$

24. $\dfrac{a}{b}\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a^2}}$ R: $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$

25. $\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ R: $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

26. $\dfrac{x}{4}\sqrt{\dfrac{16}{x^2}}$ R: 1

27. $\dfrac{x}{y}\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ R: $\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

28. $\dfrac{2}{3} x^3 \sqrt{\dfrac{9 y}{8 x}}$ R: $\sqrt{\dfrac{1}{2} x^5 y}$

29. $2 a^3 \sqrt{\dfrac{a}{2}}$ R: $\sqrt{2 a^7}$

30. $2 b^2 \sqrt[3]{b}$ R: $\sqrt[3]{8 b^7}$

31. $(b+2)\sqrt{\dfrac{1}{b^2 - 4}}$ R: $\sqrt{\dfrac{b+2}{b-2}}$

32. $\frac{x-y}{x+y}\sqrt{\frac{xy}{x-y}}$ R: $\sqrt{\frac{x^2y-xy^2}{x^2+2xy+y^2}}$

33. $(x+y)\sqrt{\frac{1}{x+y}}$ R: $\sqrt{(x+y)}$

34. $\frac{a-b}{a+b}\sqrt[3]{\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}}$ R: $\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{a+b}}$

35. $(1-a^2)\sqrt{\frac{1+a^2}{1-a^2}}$ R: $\sqrt{1-a^4}$

36. $(a-b)\sqrt{\frac{1}{a+b}}$ R: $\sqrt{\frac{(a-b)^2}{a+b}}$

37. $(x+1)\sqrt{\frac{1}{x+1}}$ R: $\sqrt{x+1}$

38. $\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ R: $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$

39. $(b+3)\sqrt{b-3}$ R: $\sqrt{(b+3)(b^2-9)}$

40. $\frac{1}{x+y}\sqrt{x+y}$ R: $\sqrt{\frac{1}{x+y}}$

Operaciones con radicales. — *Ejercicios de suma y resta de radicales semejantes.*

1. $\sqrt{2}+3\sqrt{2}-7\sqrt{2}-2\sqrt{2}+\sqrt{2}$ R: $-4\sqrt{2}$

2. $3\sqrt{5}-2\sqrt{5}+6\sqrt{5}-\sqrt{5}-5\sqrt{5}$ R: $\sqrt{5}$

3. $5\sqrt{3}+2\sqrt{3}+7\sqrt{3}-13\sqrt{3}+\sqrt{3}$ R: $2\sqrt{3}$

4. $3\sqrt{7}+(-8\sqrt{7})$ R: $-5\sqrt{7}$

5. $3\sqrt{8}-(-2\sqrt{8})$ R: $10\sqrt{2}$

6. $7\sqrt{3}-5\sqrt{3}-\sqrt{3}+9\sqrt{3}-8\sqrt{3}$ R: $2\sqrt{3}$

7. $\frac{5}{4}\sqrt{6}+\frac{3}{8}\sqrt{6}-2\sqrt{6}$ R: $-\frac{3}{8}\sqrt{6}$

8. $\frac{10}{7}\sqrt{2}-\frac{5}{2}\sqrt{2}+\sqrt{2}$ R: $-\frac{1}{14}\sqrt{2}$

9. $\sqrt{a}+\frac{3}{2}\sqrt{a}+\frac{5}{4}\sqrt{a}-15\sqrt{a}$ R: $-11\frac{1}{4}\sqrt{a}$

10. $5\sqrt{bx}-\frac{2}{3}\sqrt{bx}$ R: $4\frac{1}{3}\sqrt{bx}$

11. $a\sqrt{x}-b\sqrt{x}$ R: $(a-b)\sqrt{x}$

12. $-\frac{3}{4}b\sqrt{ac}+b\sqrt{ac}$ R: $\frac{1}{4}b\sqrt{ac}$

13. $7\sqrt{x^3}-5\sqrt{x}+12\sqrt{x}-6\sqrt{x^3}$ R: $(x+7)\sqrt{x}$

14. $\sqrt{3}+\sqrt{27}+\sqrt{48}+\sqrt{75}-\sqrt{12}$ R: $11\sqrt{3}$

Solución: $\sqrt{3}+\sqrt{9 . 3}+\sqrt{16 . 3}+\sqrt{25 . 3}-\sqrt{4 . 3} =$

$= \sqrt{3}+3\sqrt{3}+4\sqrt{3}+5\sqrt{3}-2\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$

15. $b\sqrt{a}+b\sqrt{a}-b\sqrt{c^2a}+2c\sqrt{b^2a}$ R: $(2b+bc)\sqrt{a}$

16. $2\sqrt{18}-5\sqrt{50}+3\sqrt{98}-\sqrt{72}+2\sqrt{8}$ R: 0

17. $3\sqrt{20}+12\sqrt{45}+2\sqrt{125}$ R: $52\sqrt{5}$

18. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}+\frac{5}{9}\sqrt[3]{54}$ R: $\frac{4}{15}\sqrt[3]{2}$

19. $2\sqrt{5}-\sqrt{20}+\sqrt{45}$ R: $3\sqrt{5}$

20. $-\frac{1}{2}\sqrt{12}+\frac{2}{5}\sqrt{27}+\frac{1}{4}\sqrt{48}$ R: $\frac{6}{5}\sqrt{3}$

21. $-\sqrt{45}+3\sqrt{125}+\sqrt{80}$ R: $16\sqrt{5}$

22. $2a\sqrt[8]{a^4}-3a\sqrt[6]{a^3}+9\sqrt{a^3}$ R: $8a\sqrt{a}$

Solución: $2a\sqrt{a}-3a\sqrt{a}+9a\sqrt{a} = 8a\sqrt{a}$

23. $\sqrt{a^3}+3a\sqrt{a}+5a\sqrt{a}+7\sqrt{a^3}$ R: $16a\sqrt{a}$

24. $3\sqrt{18}-11\sqrt{2}+2\sqrt{50}-4\sqrt{8}$ R: 0

25. $3\sqrt{8}-4\sqrt{18}+7\sqrt{50}-\sqrt{32}$ R: $25\sqrt{2}$

26. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{16}{27}}-\frac{5}{3}\sqrt[3]{54}+5\sqrt[3]{\frac{2}{125}}$ R: $-3\sqrt[3]{2}$

27. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x^6}-\frac{1}{6}x\sqrt[3]{16x^3}+\frac{2}{5}x^2\sqrt[3]{2}$ R: $\frac{47}{30}x^2\sqrt[3]{2}$

24. $\sqrt{\frac{}{9} y x} \cdot \sqrt[3]{\frac{27}{125} y z^2} \cdot \sqrt[6]{\frac{5}{2} x^3 y z^2}$ R: $\frac{2}{} xyz \sqrt[6]{\frac{5}{2}}$

25. $\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}} \cdot \sqrt[8]{\frac{y^3}{c}} \cdot \sqrt[12]{\frac{c^2}{x^3}}$ R: $\sqrt[24]{c\, x^{10} y}$

26. $\sqrt{bx} \cdot \sqrt[16]{x^3} \cdot \sqrt[4]{x^2} \cdot \sqrt[8]{ax}$ R: $x \sqrt[16]{a^2 b^8 x^5}$

27. $\sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}} \cdot \sqrt{a+x}$ R: $\sqrt[6]{(a+x)(a-x)^2}$

28. $\sqrt[4]{\frac{1}{a+1}} \cdot \sqrt[4]{\frac{p^4}{q}} \cdot \sqrt[6]{\frac{q^3}{p}}$ R: $\sqrt[12]{\frac{p^{10} q^3}{(a+1)^3}}$

29. $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ R: $\sqrt{a-b}$

Solución :

$$\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \sqrt{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2} = \sqrt{a-b}$$

30. $\sqrt{\sqrt{m^2+n^2}+\sqrt{2mn}} \cdot \sqrt{\sqrt{m^2+n^2}-\sqrt{2mn}}$ R: $m-n$

31. $\sqrt{12} : 2\sqrt{3}$ R: 1

32. $\sqrt{18} : \sqrt{2}$ R: 3

33. $\sqrt{\frac{10}{3}} : \sqrt{\frac{15}{2}}$ R: $\frac{2}{3}$

34. $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{21}{10}} : \frac{7}{5}\sqrt{\frac{2}{105}}$ R: 5

35. $\frac{5}{6}\sqrt{\frac{10}{3}} : 2\sqrt{\frac{5}{6}}$ R: $\frac{5}{6}$

36. $\sqrt{\frac{a}{x}} : \sqrt{\frac{x}{a}}$ R: $\frac{a}{x}$

37. $\sqrt[3]{x^2-y^2} : \sqrt[3]{x^2 b^3 - b^3 y^2}$ R: $\frac{1}{b}$

38. $\sqrt{x^2-y^2} : \sqrt{x-y}$ R: $\sqrt{x+y}$

39. $\sqrt[2n]{x} : \sqrt[n]{x^3}$ R: $\sqrt[2n]{\frac{1}{x^5}}$

40. $\sqrt[3]{144} : \sqrt[6]{12}$ R: $2\sqrt{3}$

41. $\sqrt[3]{14ab^2} : \sqrt[4]{7a^3b^2}$ R: $\sqrt[12]{112\, a^{-5} b^2}$

42. $\sqrt[3]{\frac{9}{4}} : \sqrt[5]{\frac{9}{16}}$ R: $\sqrt[15]{324}$

43. $\sqrt[6]{a^2 b} : \sqrt[3]{a b^2}$ R: $\sqrt{\frac{1}{b}}$

44. $\sqrt[9]{x^2} : \sqrt[3]{x^2}$ R: $\sqrt[9]{\frac{1}{x^4}}$

45. $\sqrt{a b^3} : \sqrt[3]{a b^4}$ R: $\sqrt[6]{ab}$

46. $\sqrt[3]{35} : \sqrt[6]{\frac{7}{5}}$ R: $\sqrt[6]{875}$

47. $(\sqrt[6]{243} + \sqrt[3]{243}) : \sqrt{3}$ R: $\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[6]{3}$

48. $\sqrt{x y^3} : \sqrt[3]{x y^4}$ R: $\sqrt[6]{xy}$

49. $\sqrt{x} : \sqrt[4]{x^3}$ R: $\sqrt[4]{\frac{1}{x}}$

50. $\sqrt[4]{\frac{a}{b}} : \sqrt[6]{\frac{b}{a}}$ R: $\sqrt[12]{\frac{a^5}{b^5}}$

51. $\sqrt[3]{\frac{a+b}{a-b}} : \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ R: $\sqrt[6]{\frac{(a+b)^5}{(a-b)^5}}$

52. $6 : \sqrt{3}$ R: $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

53. $5 : \sqrt{5}$ R: $\sqrt{25}$

54. $\sqrt[4]{a-b} : \sqrt{a-b}$ R: $\sqrt[4]{\frac{1}{a-b}}$

55. $(2a^2\sqrt[3]{x^2-1}) : (4a\sqrt{x-1})$ R: $\frac{a}{2}\sqrt[6]{\frac{(x+1)^2}{x-1}}$

Racionalización de denominadores. — *Caso en que el denominador es un irracional cuadrático.*

1. $\frac{2}{\sqrt{2}}$ R: $\sqrt{2}$

2. $\frac{3}{\sqrt{3}}$ R: $\sqrt{3}$

3. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ R: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ R: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. $\frac{2}{\sqrt{18}}$ R: $\frac{\sqrt{2}}{3}$

6. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ R: $\frac{2 . \sqrt{5}}{5}$

7. $\frac{3}{\sqrt{8}}$ R: $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

8. $\frac{5}{\sqrt{27}}$ R: $\frac{5\sqrt{3}}{9}$

9. $\frac{3}{\sqrt{6}}$ R: $\frac{\sqrt{6}}{2}$

10. $\frac{2}{\sqrt{3^3}}$ R: $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

Caso en que el denominador es un radical único:

11. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ R: $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

12. $\frac{1}{\sqrt[5]{x^9}}$ R: $\frac{\sqrt[5]{x}}{x^2}$

13. $\frac{x}{\sqrt[5]{x^7}}$ R: $\frac{\sqrt[5]{x^3}}{x}$

14. $\frac{a}{2\sqrt[7]{b}}$ R: $\frac{a\sqrt[7]{b^6}}{2b}$

15. $\frac{3y}{4\sqrt[9]{2^8 y^8}}$ R: $\frac{3\sqrt[9]{2y}}{8}$

16. $\frac{2a}{\sqrt[3]{7}}$ R: $\frac{2a\sqrt[3]{49}}{7}$

17. $\frac{2ab}{\sqrt[4]{2}}$ R: $ab\sqrt[4]{8}$

18. $\frac{2a}{\sqrt[3]{2}}$ R: $a\sqrt[3]{4}$

19. $\frac{5x}{2\sqrt{b}}$ R: $\frac{5x\sqrt{b}}{2b}$

20. $\frac{3ab}{\sqrt[5]{b^7}}$ R: $\frac{3a\sqrt[5]{b^3}}{b}$

21. $\frac{5h}{2\sqrt[3]{h}}$ R: $\frac{5\sqrt[3]{h^2}}{2}$

22. $\frac{b}{5\sqrt[7]{b^4}}$ R: $\frac{\sqrt[7]{b^3}}{5}$

23. $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}}}$ R: $\sqrt{x}$

24. $\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}$ R: $\sqrt[3]{a}$

25. $\frac{2b}{3\sqrt[7]{b^8}}$ R: $\frac{2\sqrt[7]{b^6}}{3}$

Caso en que el denominador es un binomio con un término racional y otro irracional cuadrático.

26. $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ R: $2+\sqrt{3}$

27. $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$ R: $2+\sqrt{5}$

28. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ R: $\sqrt{2}+1$

29. $\frac{2}{-1+\sqrt{5}}$ R: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

30. $\frac{(a-b)^2}{(a+b)-2\sqrt{ab}}$ R: $a+b+2\sqrt{ab}$

31. $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ R: $\frac{(3+\sqrt{5})^2}{4}$

32. $\frac{7-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$ R: $\frac{13-5\sqrt{5}}{2}$

33. $\frac{2-\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}}$ R: $\frac{12-7\sqrt{2}}{23}$

34. $\frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ R: $2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$

35. $\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ R: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

36. $\frac{3}{3-\sqrt{4}}$ R: $\frac{9+3\sqrt{4}}{5}$

37. $\frac{a}{a^2-\sqrt{b}}$ R: $\frac{a^3+a\sqrt{b}}{a^4-b}$

38. $\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$ R: $\frac{(a-\sqrt{b})^2}{a^2-b}$

39. $\frac{x+\sqrt{h}}{x+\sqrt{x}}$ R: $\frac{(x+\sqrt{h})(x-\sqrt{x})}{x^2-x}$

40. $\frac{-5-2\sqrt{6}}{-3+\sqrt{6}}$ R: $\frac{27+11\sqrt{6}}{3}$

41. $\dfrac{\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ R: $-2\sqrt{5}+5$

42. $\dfrac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{c}}$ R: $\dfrac{\sqrt{a}\,(b+\sqrt{c})}{b^2-c}$

43. $\dfrac{\sqrt{a}}{c+\sqrt{c}}$ R: $\dfrac{\sqrt{a}\,(c-\sqrt{c})}{c^2-c}$

44. $\dfrac{1}{8a+2\sqrt{2}}$ R: $\dfrac{4a-\sqrt{2}}{32a^2-4}$

45. $\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ R: $2\sqrt{3}-3$

46. $\dfrac{5}{1+\sqrt{2}}$ R: $-5+5\sqrt{2}$

47. $\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$ R: $4-2\sqrt{3}$

48. $\dfrac{1}{(a+b)-\sqrt{4ab}}$ R: $\dfrac{(a+b)+2\sqrt{ab}}{(a-b)^2}$

49. $\dfrac{7}{2+\sqrt{5}}$ R: $7\sqrt{5}-14$

50. $\dfrac{1}{-2-\sqrt{3}}$ R: $-2+\sqrt{3}$

Caso en que el denominador es ***un binomio cuyos dos términos*** *son irracionales cuadráticos.*

51. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ R: $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

52. $\dfrac{6}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ R: $-2\sqrt{2}-2\sqrt{5}$

53. $\dfrac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$ R: $\sqrt{7}-\sqrt{2}$

54. $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ R: $2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

55. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ R: $\sqrt{6}+2$

56. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ R: $5+2\sqrt{6}$

57. $\dfrac{3\sqrt{5}-\sqrt{3}}{4\sqrt{5}-5\sqrt{3}}$ R: $\dfrac{45+11\sqrt{15}}{5}$

58. $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2-b^2}}$ R: $\dfrac{a^2-\sqrt{a^4-b^4}}{b^2}$

59. $\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ R: $\sqrt{xy}$

60. $\dfrac{a\sqrt{2}-2\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{2}}$ R: $\sqrt{2a}$

61. $\dfrac{ab}{\sqrt{b^3}-\sqrt{ab^2}}$ R: $\dfrac{a(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{b-a}$

62. $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ R: $\dfrac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}$

Casos combinados.

63. $\dfrac{3}{\sqrt{11+2\sqrt{10}}}$ R: $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$

64. $\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}}$ R: $2(\sqrt{2}-1)$

65. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$ R: $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

66. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ R: $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}$

67. $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-y}}}$ R: $\sqrt{x-\sqrt{x^2-y}}$

Solución :

$$\frac{\sqrt{y}\,\sqrt{x-\sqrt{x^2-y}}}{\sqrt{x^2-x^2+u}}=\frac{\sqrt{y}\,\sqrt{x-\sqrt{x^2-y}}}{\sqrt{y}}=\sqrt{x-\sqrt{x^2-y}}$$

68. $\dfrac{1-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{7+2\sqrt{2}}}$ R: $2\sqrt{2}+\sqrt{7+2\sqrt{2}}$

69. $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ R: $\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}$

70. $\dfrac{28}{3+\sqrt{2}+\sqrt{7}}$ R: $-3\sqrt{14}+2\sqrt{7}+7\sqrt{2}$

Racionalización de numeradores. — Para resolver ciertos problemas que se presentan con frecuencia es necesario hacer desaparecer los iracionales que figuran en el numerador de la expresión con la que se opera. Para ello se procede en forma análoga a la empleada para racionalizar denominadores. Por ejemplo si la expresión es la diferencia $\sqrt{x}-\sqrt{a}$ se la multiplica y divide por su conjugada y se tiene:

$$\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{a})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

Procédase en forma análoga para resolver los siguientes ejercicios:

71. $\sqrt{x}$ R: $\dfrac{x}{\sqrt{x}}$

72. $\sqrt{3}$ R: $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$

73. $\sqrt{6x}$ R: $\dfrac{6x}{\sqrt{6x}}$

74. $2\sqrt{z}$ R: $\dfrac{2z}{\sqrt{z}}$

75. $\sqrt[3]{a}$ R: $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$

76. $\sqrt[3]{3a^2}$ R: $\dfrac{3a}{\sqrt[3]{9a}}$

77. $\sqrt[5]{x^7}$ R: $\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{x^3}}$

78. $3\sqrt[7]{x^3}$ R: $\dfrac{3x}{\sqrt[7]{x^4}}$

79. $\sqrt{x}-1$ R: $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$

80. $1-\sqrt{x}$ R: $\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

81. $\sqrt{x}-2$ R: $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}$

82. $\sqrt{x}+\sqrt{2}$ R: $\dfrac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$

POTENCIAS DE EXPONENTE FRACCIONARIO

Estamos tan habituados al empleo de exponentes para indicar las potencias de un número, que nos resulta difícil admitir que esa notación, que para el caso del cuadrado y del cubo comenzamos a emplear en la Escuela Primaria, haya necesitado mucho tiempo para que su adopción se generalizara.

Se aproxima algo a esa notación la que encontramos en Bürgi (año 1619) y Reymers (año 1619) quienes escriben

$$\begin{array}{ccccccc} VI & V & IV & III & II & I & 0 \\ 8 & +12 & -9 & +10 & +3 & +7 & -5 \end{array}$$

para representar al polinomio de una variable

$$8x^6+12x^5-9x^4+10x^3+3x^2+7x-4$$

Como se ve no escriben la base de la potencia. Esa notación es, no obstante eso, superior a la empleada por Scheubel, quien representa a las potencias primera, segunda, tercera, cuarta y quinta de la variable por *pri., sec., quar., quin.*, respectivamente y a la de Ramus, que representaba a esas mismas potencias por las letras *l, q, c, bq, s* respectivas abreviaciones de las palabras *latus, quadratus, cubus, biquadratus* y *solidus*. Stevin emplea los números 1, 2, 3, ... encerrados en un círculo, para representar las potencias primera, segunda, tercera ... de una variable, cuya escritura también omite, escri-cribiendo, por ejemplo:

$$(3) = 2(2) + 3(1) - 6 \text{ para indicar } x^3 = 2x^2+3x-6$$

Se atribuye a Descartes la manera de escribir las potencias de exponente natural en la forma que lo hacemos actualmente y a J. Wallis el significado claro y preciso del exponente 0, de los negativos y de los fraccionarios. Anteriormente una potencia de exponente, $1\frac{1}{2}$, por ejemplo, del número 9 se escribía así: $1\frac{1}{2}\,9^{p}$, o también así: $\boxed{1^{p}\,\frac{1}{2}}\,9$ en lugar de $9^{1\frac{1}{2}}$.

Hallar el valor aritmético de las potencias siguientes:

1. $36^{\frac{1}{2}}$ R: 6

2. $81^{\frac{1}{2}}$ R: 9

3. $8^{\frac{1}{3}}$ R: 2

4. $64^{\frac{1}{6}}$ R: 2

5. $32^{\frac{1}{5}}$ R: 2

6. $256^{\frac{1}{4}}$ R: 4

7. $243^{\frac{1}{5}}$ R: 3

8. $1296^{\frac{1}{4}}$ R: 6

9. $49^{\frac{1}{2}}$ R: 7

10. $729^{\frac{1}{3}}$ R: 9

11. $1331^{\frac{1}{3}}$ R: 11

12. $16^{\frac{3}{2}}$ R: 64

13. $81^{\frac{3}{4}}$ R: 27

14. $\left(\frac{49}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$ R: $\frac{7}{9}$

15. $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$ R: $\frac{3}{4}$

16. $\left(\frac{27}{512}\right)^{\frac{1}{3}}$ R: $\frac{3}{8}$

17. $\left(\frac{729}{64}\right)^{\frac{1}{6}}$ R: $\frac{3}{2}$

18. $\left(\frac{121}{144}\right)^{\frac{1}{2}}$ R: $\frac{11}{12}$

19. $0{,}125^{\frac{1}{3}}$ R: 0,5

20. $1{,}44^{\frac{1}{2}}$ R: 1,2

21. $729^{-\frac{1}{3}}$ R: $\frac{1}{9}$

22. $343^{-\frac{1}{3}}$ R: $\frac{1}{7}$

23. $216^{-\frac{1}{3}}$ R: $\frac{1}{6}$

24. $\left(\frac{1{,}44}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$ R: $\frac{2}{15}$

25. $64^{-\frac{1}{6}}$ R: $\frac{1}{2}$

26. $8^{-\frac{1}{3}}$ R: $\frac{1}{2}$

27. $27^{-\frac{2}{3}}$ R: $\frac{1}{9}$

28. $32^{-\frac{1}{5}}$ R: $\frac{1}{2}$

29. $512^{-\frac{2}{3}}$ R: $\frac{1}{64}$

30 $1{,}728^{-\frac{1}{3}}$ R: $\frac{5}{6}$

31. $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$ R: $\frac{27}{8}$

32. $0{,}0025^{-\frac{3}{2}}$ R: $\frac{1}{0{,}000125}$

33. $16^{0{,}5}$ R: 4

34. $81^{0{,}25}$ R: 3

35. $4^{1{,}5}$ R: 8

36. $(-32)^{0{,}2}$ R: -2

37. $243^{0{,}4}$ R: 3

38. $(0{,}0000000001)^{0{,}1}$ R: 0,1

39. $(0{,}01)^{-0{,}5}$ R: 10

40. $(-0{,}008)^{-0{,}33\ldots}$ R: -5

Efectuar las siguientes operaciones:

1. $9^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{4}}$ R: $3\sqrt{3}$

2. $25^{\frac{1}{2}} \cdot 25^{\frac{1}{6}}$ R: $5\sqrt[3]{5}$

3. $0{,}25^{\frac{1}{2}} \cdot 0{,}25^{\frac{1}{4}}$ R: $0{,}5\sqrt{0{,}5}$

4. $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}$ R: $\sqrt[12]{3^{11}}$

5. $a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{2}{3}}$ R: $\sqrt[15]{a^{13}}$

6. $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{5}{6}}$ R: x

7. $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{4}}$ R: $\sqrt[4]{b^{3}}$

8. $5^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{1}{3}}$ R: $\sqrt{5}$

9. $11^{\frac{2}{3}} \cdot 11^{\frac{1}{3}}$ R: 11

10. $a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$ R: $\sqrt[4]{a^{3}}$

11. $3^{2} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{5}{3}}$ R: 3

12. $0{,}04^{\frac{1}{2}} \cdot 0{,}04^{\frac{1}{2}} : 0{,}04^{\frac{4}{3}}$ R: 0,0016

13, $\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{2}{3}}$ R: $\frac{27}{125}$

14. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{3}{4}}$ R: 5

15. $x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{2}{3}}$ R: 1

16. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{2}}$ R: 16

17. $\sqrt{a} \cdot a^{-\frac{1}{2}}$ R: 1

18. $a^{\frac{1}{2}}\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}$ R: $\sqrt[4]{a^{5}}$

19. $a^{\frac{}{3}} \cdot \sqrt[3]{a^{-4}}$ R: $\sqrt[3]{a}$

20. $b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{3}}$ R: 1

21. $a^{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt[5]{a^{-\frac{2}{3}}}$ R: $\sqrt{a^{7}}$

22. $b^{\frac{2}{3}} \sqrt{b^{-3}}$ R: $\sqrt[6]{\frac{1}{b^{5}}}$

23. $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{2}{3}}$ R: $\sqrt[6]{\frac{1}{a}}$

24. $b^{\frac{1}{2}} : b^{-\frac{1}{2}}$ R: b

25. $h^{-} : h^{\frac{1}{4}}$ R: $\sqrt[4]{h}$

26. $5^{\frac{1}{3}} : 5^{\frac{1}{6}}$ R: $\sqrt[6]{5}$

27. $9^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{1}{4}}$ R: 3

28. $27^{-\frac{1}{3}} : 27^{\frac{1}{3}}$ R: $\frac{1}{9}$

29. $81^{\frac{2}{3}} : 81^{-\frac{1}{12}}$ R: 27

30. $0{,}25^{\frac{1}{3}} : 0{,}25^{\frac{1}{4}}$ R: $\sqrt{0{,}5}$

31. $5{,}2^{\frac{1}{3}} : 5{,}2^{\frac{1}{2}}$ R: $\sqrt[6]{\frac{1}{5{,}2}}$

32. $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{5}} : \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{15}}$ R: $\frac{1}{2}$

33. $\sqrt[3]{b^2} : b^{-1}$ R: $\sqrt[3]{b^5}$

34. $\sqrt{x^3} : x^{\frac{1}{2}}$ R: x

35. $\sqrt[5]{5^2} : 5^{\frac{2}{3}}$ R: $\sqrt[15]{\frac{1}{5^4}}$

36. $\sqrt[4]{h^3} : h^{-\frac{1}{2}}$ R: $\sqrt[4]{h^5}$

37. $\left(a^{-\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}\right)^2$ R: $\frac{1}{a} + a + 2$

38. $\left(m^{-\frac{5}{4}} \cdot m^{-\frac{1}{4}}\right)^4$ R: $\frac{1}{m^6}$

39. $\left(x^{-\frac{1}{6}}\right)^{-4}$ R: $\sqrt[3]{x^2}$

40. $\left(a^{-\frac{5}{6}}\right)^{2 \cdot -\frac{3}{5}}$ R: a

41. $\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)$ R: $x - y$

42. $\left(\frac{a^{-\frac{2}{3}}\, b^{\frac{1}{2}}}{a \quad b^{-1}}\right)^2 : \sqrt[3]{\frac{a^{-1}}{b^{-3}}}$ R: $a^{-3} b^2$

43. $\left(\frac{a^{-2}\, b^3}{a^3 \cdot b^{-2}}\right)^{-\frac{1}{5}} \cdot \left(\frac{a^{-3}\, b^3}{a^3 \quad b^{-3}}\right)^{-1}$ R: $a^7 b^7$

44. $\sqrt[3]{a^{-1} \sqrt{b^3}} : \sqrt{b \sqrt[3]{a}}$ R: $a^{-\frac{1}{2}}$

45. *Ordenar de mayor a menor:*

$2^{\frac{2}{3}}$; $4^{\frac{5}{2}}$; 8^{-1} ; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}$; 2^{-3} ; $\left(2^{-\frac{2}{9}}\right)^9$

R: $4^{\frac{5}{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} > 2^{\frac{2}{3}} > \left(2^{-\frac{2}{9}}\right)^9 > 8^{-1} = 2^{-3}$

Verificar que:

46. $$\frac{5^{4x+4}}{5^{4x} \cdot 5^5 - 5^{3x-3} \cdot 5^{x+7}} = \frac{1}{4}$$

47. $$\frac{2^{4m} \cdot 2^3}{2^{4m} \cdot 2^5 - 2^{4m-1} \cdot 2^5} = \frac{1}{2}$$

48. $$\frac{2^{2x+4}}{2^{x^2-x}} : \frac{2^{3x^2+3x}}{2^{4x^2+4}} = 256$$

49. $$\left(x^{\frac{7}{12}} \sqrt{\left(\sqrt[6]{\frac{x^4}{x^9}}\right)^4}\right)^{-6} = \sqrt{x}$$

50. $$\left(\frac{(x^{-\frac{1}{2}}\, y)^{-2}}{x\, y^{-3}} : \frac{x^{-\frac{5}{6}}\, y^{\frac{3}{4}}}{x^{-\frac{1}{12}}\, y^{-\frac{1}{2}}}\right)^{-4} = x^{-15}\, y$$

51. $$\sqrt{13 + \sqrt{2} + \frac{7}{3 + \sqrt{2}}} = 4$$

52. $$\sqrt{1 - 3^{-2}} - 2^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{-1} = 0$$

53. $$\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{8}{27}}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{5}{24}$$

54.

$$\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4} + 1}\right)^6 + \left[\left(\sqrt[3]{\frac{8}{5} - 2}\right)^{-3}\right]^{-1} - (-2)^{-2} + \frac{3}{4}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} (-2)^{-3}\, (-3)^2 + (-2) \cdot \frac{3}{4} - (-1)^{-2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-1}} = -\frac{33}{80}$$

55. $$\left(\frac{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)}} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{1 + \frac{1}{3}} = 3$$

Se demuestra en Cálculo infinitesimal que el *radio de curvatura* ρ de una curva de ecuación $y = f(x)$ está dado por la fórmula

$$\rho = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''} .$$

56. *Calcular el radio de curvatura de:* a) *la circunferencia* $x^2 + y^2 = r^2$ *sabiendo que* $y' = \dfrac{x}{\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ e $y'' = \dfrac{r^2}{\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$;

b) *de la parábola* $x^2 = 2\,py$ *en su vértice* V (0 ; 0) *sabiendo que en ese punto es* $y' = 0$ e $y'' = \dfrac{1}{p}$;

c) *de la curva de ecuación* $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}}$ *para la cual es:*

$$y' = -\,x^{-\frac{1}{2}}\,y^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad y'' = \frac{1 + x^{-\frac{1}{2}}\,y^{\frac{1}{2}}}{2\,x}$$

R: a) $\rho = r$; b) $\rho = p$; c) $\rho = 2\,c^{-\frac{1}{2}}\,(x + y)^{\frac{3}{2}}$

Hallar x sabiendo que:

1. $x^{\frac{1}{2}} = 3$ R: $x = 9$ **2.** $x^{\frac{1}{4}} = 2$ R: $x = 16$

3. $x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ R: $x = \frac{1}{4}$ **4.** $x^{\frac{1}{2}} = 8$ R: $x = 64$

5. $x^{-\frac{1}{2}} = 3$ R: $x = \frac{1}{9}$ **6.** $x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$ R: $x = 8$

7. $x^{-2} = 4$ R: $x = \frac{1}{2}$ **8.** $x^{-3} = -\frac{1}{27}$ R: $x = -3$

9. $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$ R: $x = 16$ **10.** $x^{-\frac{1}{5}} = -\frac{1}{2}$ R: $x = -32$

11. $\left(\frac{1}{4}\,x\right)^{-\frac{2}{3}} = 1$ R: $x = 4$ **12.** $x^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ R: $x = \frac{1}{16}$

13. $x^{-4} = 1$ R: $x = 1$ **14.** $(2\,x)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}$ R: $x = 2$

Solución del **14.** — Elevando ambos miembros a la $-\dfrac{2}{3}$ da:

$$\left[(2\,x)^{-\frac{3}{2}}\right]^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \quad \text{por prop. unif. de la potencia}$$

o sea $(2\,x)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2}$ por pot. de pot. y def. pot. exp. frac. neg.

como $\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = 1$ y $8 = 2^3$, resulta:

$$2\,x = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{(2^2)^3} = 2^2$$ por pot. de pot. y cor. de la def. de raíz y $x = \dfrac{2^2}{2} = 2$

15. $(3\,x)^{\frac{1}{2}} = 3$ R: $x = 3$ **16.** $(x + 9)^{\frac{1}{2}} = 6$ R: $x = 27$

17. $20 - 3\,x^{\frac{1}{2}} = 2$ R: $x = 36$ **18.** $(x - 7)^{\frac{1}{2}} = 7$ R: $x = 56$

19. $(x - 15)^{\frac{1}{2}} = 8$ R: $x = 79$ **20.** $(3\,x - 16)^{\frac{1}{3}} = 2$ R: $x = 8$

21. $(x^2 - 9)^{\frac{1}{2}} + x = 9$ R: $x = 5$ **22.** $(2\,x^2 + 8)^{\frac{1}{2}} = 4$ R: $x = \pm 2$

23. $(x^2 - 5)^{\frac{1}{2}} = 2$ R: $x = \pm 3$ **24.** $(2\,x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = 7$ R: $x = \pm 5$

25. $(2\,x + 5)^{\frac{1}{3}} = 3$ R: $x = 11$ **26.** $(2\,x + 12)^{\frac{1}{4}} = 2$ R: $x = 2$

27. $(5\,x + 10)^{\frac{1}{2}} = 5$ R: $x = 3$ **28.** $30 + 2\,x^{\frac{1}{2}} = 36$ R: $x = 9$

29. $3\,x^{\frac{1}{3}} + 12 = 18$ R: $x = 8$ **30** $26 - 2\,x^{\frac{2}{3}} = 8$ R: $x = 27$

Solución del **30.** — Pasando el término que contiene a x al 2º miembro, y 8 al primero, restando, da:

$$18 = 2\,x^{\frac{2}{3}} \quad \therefore \quad x^{\frac{2}{3}} = 9.$$

Elevando ambos miembros a la $\dfrac{3}{2}$, se tiene:

$$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{3}{2}}$$ por prop. unif. pot. exp. frac.

o sea $x^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}} = 9^{\frac{3}{2}}$ por pot. de una pot.

Pero $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{2} = 1$ y $9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^{2\cdot\frac{3}{2}} = 3^3 = 27$.

resulta $x = 27$

31. $8^x = (2^3)^2$ R: $x = 2$

32. $8^x = 2^{3^2}$ R: $x = 3$

33. $16^x = (2^4)^5$ R: $x = 5$

34. $16^x = 2^{4^5}$ R: $x = 256$

35. $x = 1000 \, . \, 8^{-\frac{2}{3}}$ R: $x = 250$

36. $x = 3\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$ R: $x = \frac{8}{9}$

37. $4^{\frac{1}{x}} = 16$ R: $x = \frac{1}{2}$

38. $5^{2x} = 125^{-2}$ R: $x = -3$

39. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} = 81$ R: $x = -\frac{1}{2}$

40. $2^{2x-1} = 0{,}03025$ R: $x = -2$.

Solución del **40.** — Como

$$0{,}03025 = \frac{3\,025}{100\,000} = \frac{5^5}{10^5} = \left(\frac{5}{10}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 2^{-5} \quad \text{es} \quad 2^{2x-1} = 2^{-5}$$

para lo cual debe ser $2x - 1 = -5 \quad \therefore \quad x = -2$

41. $2^{3x} = 1$ R: $x = 0$

42. $2^{x-1} = 1$ R: $x = 1$

43. $3^{x+2} = 1$ R: $x = -2$

44. $5^{2x+1} = 1$ R: $x = -\frac{1}{2}$

Solución del **44.** — Siendo $5^0 = 1$ es $5^{2x+1} = 5^0$

para lo cual debe ser $2x + 1 = 0 \quad \therefore \quad x = -\frac{1}{2}$

45. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^3$ R: $x = -3$

46. $\left(\frac{m}{n}\right)^x = \left(\frac{n}{m}\right)$ R: $x = -p$

47. $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-5} = \left(\frac{3}{2}\right)^{5x-2}$ R: $x = 1$

48. $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-3x} = 2^{3x-x}$ R: $x = 1$

49. $5^x + 5^{x-1} = 6^x$ R: $x = 1$

50. $3^{x-3} - 3^{x-2} = 2^{x-3} - 2^{x-1}$ R: $x = 4$

Solución del **50.** — Sacando factor común a 3^{x-3} en el 1er miembro y a 2^{x-3} en el 2^{o}, se tiene:

$$3^{x-3}(1-3) = 2^{x-3}(1-4) \quad \therefore \quad 3^{x-3}(-2) = 2^{x-3}(-3)$$

luego $\dfrac{3^{x-3}}{-3} = \dfrac{2^{x-3}}{-2}$ o sea $-3^{x-4} = -2^{x-4}$

y como $3 \neq 2$ esta ecuación sólo se satisface si $x - 4 = 0 \quad \therefore \quad x = 4$.

51. $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} = 120$ R: $x = 5$

52. $4^{x-4} + 4^{x-3} + 4^{x-2} + 4^{x-1} = 340$ R: $x = 5$

Solución. — Sacando 4^{x-4} como factor común

$$4^{x-4}(1 + 4 + 4^2 + 4^3) = 340 \quad \therefore \; 4^{x-4} \, . \, 85 = 340$$

o sea $4^x : 4^4 = \dfrac{340}{85} \quad \therefore \quad 4^x = \dfrac{340 \, . \, 4^4}{85} = 4^5 \quad \therefore \quad x = 5$.

53. $2 \, . \, 5^{x-2} + 2^x = 12 \, . \, 5^{x-3} + 3 \, . \, 2^{x-3}$ R: $x = 4$

54. $2^x + 2 \, . \, 3^{x+1} = 3^{x+3} - 5 \, . \, 2^{x+2}$ R: $x = 0$

55. $\sqrt[4]{5^{13x-2}} = \sqrt[3]{5^{7x+4}}$ R: $x = 2$

56. $\sqrt[x-2]{3^{x-3}} = \sqrt[x+3]{3^{x+1}}$ R: $x = 7$

Solución. — Para que sea $3^{\frac{x-3}{x-2}} = 3^{\frac{x+1}{x+3}}$

debe ser $\dfrac{x-3}{x-2} = \dfrac{x+1}{x+3}$

o sea $(x-3)(x+3) = (x+1)(x-2)$

y efectuando operaciones

$$x^2 - 9 = x^2 - x - 2 \quad \therefore \quad x = 7.$$

Hallar los valores de x e y que satisfacen simultáneamente a las ecuaciones exponenciales :

57. $\begin{cases} a^{x+y} = a \\ a^{x-y} = a^2 \end{cases}$ R: $x = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$

58. $\begin{cases} 2^{x+5} = 4^y \\ 5^{x-y} = 25 \end{cases}$ R: $x = 9$, $y = 7$

59. $\begin{cases} 2^{x+y} = 1 \\ 3^{x+2y} = 3 \end{cases}$ R: $x = -1$, $y = 1$

60. $\begin{cases} a^{-2x+y} = 1 \\ 9^{x+y} = 27 \end{cases}$ R: $x = 0{,}5$, $y = 1$

61. $\begin{cases} 4^{x-y} = \frac{1}{2} \\ 2^{x+y} = \sqrt{2} \end{cases}$ R: $x = -\frac{1}{4}$, $y = \frac{3}{4}$

62. $\begin{cases} 2^{x-3y} = 0{,}25 \\ 2^{x+y} = 0{,}5 \end{cases}$ R: $x = -1{,}25$, $y = 0{,}25$

Resolvemos como modelo el sistema nº 59.

Como $1 = 2^0$ y $3 = 3^1$ el sistema dado puede escribirse así:

$\begin{cases} 2^{x+y} = 2^0 \\ 3^{y+2y} = 3^1 \end{cases}$ para lo cual debe ser $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

Restando m. a m. da $-y = -1 \therefore y = 1$

y sustituyendo este valor de y en la primera ecuación da

$$x + 1 = 0 \quad \therefore \quad x = -1.$$

LOGARITMOS

Juan Neper (inglés, 1550-1617), inventor de los logaritmos, escribió en el prólogo de su obra "*Descripción de una admirable tabla de logaritmos*" (*): "Viendo, mis estimados estudiantes, que no hay nada más fatigoso para la práctica de la Matemática, ni que moleste y estorbe más al calculista, que las multiplicaciones, divisiones, elevación al cuadrado y extracción de raíces de números grandes, las cuales, además del tedioso gasto de tiempo que exigen están, en la mayoría de los casos, sujetos a muchos y escurridizos errores comencé a pensar por qué arte seguro y rápido podría eliminar esos inconvenientes." En esas tablas Neper explica la naturaleza de los logaritmos de los senos de los ángulos comprendidos entre 0° y 90° de minuto en minuto con 7 cifras decimales. No obstante constar de tan sólo 90 páginas de tablas su construcción le llevó 20 años de paciente, rigurosa y constante labor. Se admiran su tenacidad, constancia, paciencia y habilidad si se tiene en cuenta que en esa época no se conocía la notación de los exponentes para indicar las potencias de un número. Neper obtuvo sus logaritmos por comparación de los términos de una progresión aritmética cuyo primer término es 0 y la razón 1, con los de la progresión geométrica de primer término 10 000 000 y razón $1 - 0{,}0000001 = 0{,}9999999$, lo que equivale a tomar como base del sistema al número $1{,}0000001^{10\,000\,000}$ que difiere en menos de un millonésimo del número $e = 2{,}718281\ldots$ que se toma como base de los logaritmos llamados *naturales* ó *neperianos*. La invención de Neper ejerció gran influencia en los métodos de cálculo y fué de inestimable valor para la humanidad. Gracias a su genio, tenacidad y poder de concentración, los matemáticos, astrónomos actuarios, ingenieros..., ahorraron y ahorran, incontables horas de tiempo en la realización de operaciones aritméticas, y si bien el empleo de las modernísimas máquinas de calcular electrónicas evitan el empleo de los logaritmos no deja de ser cierto que "su invención, al simplificar los cálculos duplicara la vida efectiva de los astrónomos."

Se debe a H. Briggs (inglés, 1556-1631) el empleo de la base 10 y la publicación de la primera tabla de logaritmos decimales.

(**) Definición y ejemplos. — *Verificar que se cumplen las siguientes igualdades:*

1. $\log_{13} 169 = 2$; 2. $\log_4 64 = 3$; 3. $\log_3 243 = 5$;
4. $\log_8 4096 = 4$; 5. $\log_2 512 = 9$; 6. $\log_{15} 225 = 2$;

(*) La obra está escrita en latín, idioma científico de la época, y su título es Merifici arithmorum Canonis Descriptio.

(**) En el Apéndice, págs. 212 a 215, se tratan los *Logaritmos neperianos* y el *Cambio de base*.

7. $\log_{10} 0{,}1 = -1$; 8. $\log_{10} 0{,}01 = -2$; 9. $\log_{10} 0{,}00001 = -5$;

10. $\log_2 \frac{1}{4} = -2$; 11. $\log_2 \frac{1}{8} = -3$; 12. $\log_5 \frac{1}{125} = -3$;

13. $\log_4 2 = \frac{1}{2}$; 14. $\log_{1000} 10 = \frac{1}{3}$; 15. $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$;

16. $\log_{49} \frac{1}{7} = -\frac{1}{2}$; 17 $\log_{125} \frac{1}{5} = -\frac{1}{3}$; 18. $\log_{16} \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$;

Solución del **16**: $(49)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7}$

19. $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$; 20 $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$; 21. $\log_{\sqrt[3]{2}} 2 = 3$;

22. $\log_a a^{-3} = -3$; 23. $\log_{2a} 16\, a^4 = 4$; 24. $\log_{x^2} x^{16} = 8$;

25. $\log_a \frac{1}{a} = -1$; 26. $\log_{a^6} a^3 = \frac{1}{2}$; 27. $\log_a \sqrt[3]{a^2} = \frac{2}{3}$;

28. $\log_a \frac{1}{\sqrt{a}} = -\frac{1}{2}$; 29. $\log_{\frac{1}{m}} m^{-5} = 5$; 30. $\log_{x^2} x^{\frac{2}{5}} = \frac{1}{5}$.

Escribir en forma de logaritmos las igualdades:

1. $196 = 14^2$; 2. $225 = 15^2$; 3. $441 = 21^2$;

4. $4096 = 8^4$; 5. $343 = 7^3$; 6. $625 = 5^4$;

7. $0{,}03125 = 2^{-5}$; 8. $0{,}008 = 5^{-3}$; 9. $16 = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$;

10. $6561 = \left(\frac{1}{9}\right)^{-4}$; 11. $512 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-9}$; 12. $0{,}0016 = 5^{-4}$;

Solución del **12**: $\log_5 0{,}0016 = -4$

13. $a = x^3$; 14. $a = x^{3+y}$; 15. $16\, a^4 = (2\, a)^4$;

16. $\frac{1}{a} = a^{-1}$; 17. $a^3 = (a^6)^{\frac{1}{2}}$; 18. $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$

Corolario de la definición. — Si $\log_b a = x$ es por def. $b^x = a$

y reemplazando x por su igual $\log_b a$ da $b^{\log_b a} = a$

EJEMPLOS. $2^{\log_2 8} = 8$; $4^{\log_4 5} = 5$; $10^{\log 6} = 6$.

Hallar x sabiendo que:

19. $2^{\log_2 x} + 7^{\log_7 5} = 3^{\log_3 9}$ R: $x = 4$

20. $5 \,.\, 10^{\log 2x} - 10 = 0$ R: $x = 1$

21. $x^{\log_x 2} - 4x = 0$ R: $x = \frac{1}{2}$

22. $5^{\log_x 9} = 9$ R: $x = 5$

23. $3^{\log_{2x} 17} = 17$ R: $x = 1{,}5$

24. $4^{2x} = 16 \,.\, 2^{2x+2}$ R: $x = 3$

25. $5^{\log_5 192} = 3x$ R: $x = 64$

Probar aplicando la definición de logaritmo y el corolario de la definición que:

26. $\log_c (ab) = \log_c a + \log_c b$; 27. $\log_c (a : b) = \log_c a - \log_c$

28. $\log_c a^m = m \log_c a$; 29. $\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_c a$

Como modelo demostramos la **26**. Por definición de logaritmo resulta que

para que sea $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$

debe ser $c^{\log_c a + \log_c b} = ab$

y lo es pues $c^{\log_c a + \log_c b} = c^{\log_c a} \,.\, c^{\log_c b}$ por recip. prod. pots. ig. base

simplificando $c^{\log_c a + \log_c b} = a \,.\, b$ por cor. de la def.

29. *Probar que* $\log_b a \cdot \log_a b = 1$.

En efecto: el $\log_b a$ es el exponente de la potencia a la que hay que elevar a b para obtener a a luego $b^{\log_b a} = a$.

Tomando log en base a de ambos miembros de la igualdad da

$\log_b a \cdot \log_a b = 1$ por log. de una pot. y ser $\log_a a = 1$ por def.

Ejemplo. $\log_2 8 \cdot \log_8 2 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$; $\log_{10} 100 \cdot \log_{100} 10 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

30. $b^{\log_{\sqrt{b}} c} = c^2$

31. $9^{\log_{27} 8} = \sqrt[3]{64}$

32. $2^{\log_{\frac{1}{2}} 3} = \frac{1}{3}$

33. $4^{\log_{\sqrt[3]{4}} 10} = 10$

Solución del **31**: Siendo $9 = 3^2$ elevando ambos miembros a $\log_{27} 8$, se tiene $9^{\log_{27} 8} = 3^{2 \log_{27} 8}$ por prop. unif. de la poten.

y por recip. log. de una pot. $9^{\log_{27} 8} = 3^{\log_{27} 8^2}$

Multiplicando y dividiendo por 3 al exponente del segundo miembro da

$$9^{\log_{27} 8} = 3^{3 \cdot \frac{1}{3} \log_{27} 8^2} = 27^{\log_{27} 8^{\frac{2}{3}}} = 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64}$$

de acuerdo con el corolario de la definición y el significado de una potencia de exponente fracionario.

Aplicar la definición de logaritmo para escribir como potencia de 10 a las expresiones siguientes:

34. a R: $10^{\log a}$

35. $3x$ R: $10^{\log 3 + \log x}$

36. $2x^3$ R: $10^{\log 2 + 3 \log x}$

37. $\frac{x}{y}$ R: $10^{\log x - \log y}$

38. $\sqrt[m]{x}$ R: $10^{\frac{1}{m} \log x}$

39. $2m^2n$ R: $10^{\log 2 + 2 \log m + \log n}$

40. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ R: $10^{-\log 2 - \frac{1}{2} \log x}$

Solución del **36**: Siendo $\log 2x^3 = \log 2 + 3 \log x$ por log. de un prod. y de una pot., es $2x^3 = 10^{\log 2 + 3 \log x}$ por cor. de la def.

y también $2x^3 = 10^{\log 2} \cdot 10^{3 \log x}$ por prod. pots. ig. base

Hallar los logaritmos siguientes: *con resultados naturales menores que* 10.

1. $\log_{13} 169$ R: 2

2. $\log_8 4096$ R: 4

3. $\log_7 343$ R: 3

4. $\log_3 243$ R: 5

5. $\log_{10} 10000$ R: 4

6. $\log_{10} 1000000$ R: 6

7. $\log_{100} 1000000$ R: 3

8. $\log_{1000} 1000000$ R: 2

9. $\log_{2a} 32a^5$ R: 5

10. $\log_{3ab^2} 81a^4b^8$ R: 4

Con resultados negativos.

11. $\log_{\frac{1}{4}} 16$ R: -2

12. $\log_{\frac{1}{3}} 243$ R: -5

13. $\log_{\frac{1}{5}} 125$ R: -3

14. $\log_5 0{,}008$ R: -3

15. $\log_{10} 0{,}01$ R: -2

16. $\log_{10} 0{,}0001$ R: -4

17. $\log_5 0{,}0016$ R: -4

18. $\log_a \frac{1}{a}$ R: -1

19. $\log_a \frac{1}{a^3}$ R: -3

20. $\log_{\frac{a}{b}} \frac{b^2}{a^2}$ R: -2

Con resultados fraccionarios.

21 $\log_4 2$ R: $\frac{1}{2}$

22. $\log_{27} 3$ R: $\frac{1}{3}$

23 $\log_{81} 3$ R: $\frac{1}{4}$

24. $\log_8 \frac{1}{2}$ R: $-\frac{1}{3}$

25. $\log_{49} \frac{1}{7}$ R: $-\frac{1}{2}$

26. $\log_{100} 10$ R: $\frac{1}{2}$

27. $\log_{100} 0{,}1$ R: $-\frac{1}{2}$

28. $\log_{a^5} a$ R: $\frac{1}{5}$

29. $\log_{a^5} \frac{1}{a}$ R: $-\frac{1}{5}$

30. $\log_a \sqrt[4]{a}$ R: $\frac{1}{4}$

Ecuaciones que se resuelven aplicando la definición de logaritmos y sus propiedades:

31. $\log_x 125 = \log 10\,000 - \log_4 64 + \log_2 \frac{1}{4} + \log_5 \sqrt{5} + \log \sqrt{2^7}$

R: $x = 3$

32. $3 \log_x 81 = -12$ — R: $x = \frac{1}{3}$

33. $\log_{2x} 100 = 2$ — R: $x = 5$

34. $3 \log_{\frac{1}{8}} x = -2$ — R: $x = 4$

35. $5 \log_2 x - 3 \log_4 x = 56$ — R: $x = 65\,536$

36. $2 \log_3 x + 3 \log_{27} x = 15$ — R: $x = 243$

Resolvemos como modelo al ejercicio **36**:

Si $\log_{27} x = y$ es, por def. $27^y = x$ y como $27 = 3^3$

es $(3^3)^y = x$ o sea $3^{3y} = x$.

Luego

$\log_3 x = 3y = 3 \log_{27} x$ $\therefore$ $2 \log_3 x + 3 \log_{27} x = 3 \log_3 x = 15$ $\therefore$ $\log_3 x = 5$

y por definición de logaritmo $x = 3^5 = 243$.

Propiedades de los logaritmos. — *Descomponer los logaritmos siguientes en expresiones donde aparezcan logaritmos más simples.*

1. $\log 4 a^2 b$ — R: $\log 4 + 2 \log a + \log b$
2. $\log 2 (a + x)(a + y)$ — R: $\log 2 + \log (a + x) + \log (a + y)$
3. $\log 2 (b + c)^2$ — R: $\log 2 + 2 \log (b + c)$
4. $\log 10 x^2$ — R: $\log 10 + 2 \log x$
5. $\log (10 x)^2$ — R: $2 \log 10 + 2 \log x$
6. $\log (3 b)^5 (a - b)^2$ — R: $5 \log 3 + 5 \log b + 2 \log (a - b)$
7. $\log \frac{18}{a + b}$ — R: $\log 18 - \log (a + b)$
8. $\log \frac{x}{y^2 z}$ — R: $\log x + 2\,\text{colog}\, y + \text{colog}\, z$
9. $\log \frac{3 (a - b)}{5 (a + b)^3}$ — R: $\log 3 + \log (a - b) + \text{colog}\, 5 + 3\,\text{colog}\, (a + b)$
10. $\log \frac{1}{a}$ — R: $-\log a = \text{colog}\, a$

11. $\log \frac{1}{a b}$ — R: $-(\log a + \log b) = \text{colog}\, a + \text{colog}\, b$
12. $\log \frac{a x}{c^2 b^3}$ — R: $\log a + \log x + 2\,\text{colog}\, c + 3\,\text{colog}\, b$
13. $\log \frac{1}{\sqrt{a}}$ — R: $-\frac{1}{2} \log a = \frac{\text{colog}\, a}{2}$
14. $\log a x^2 \sqrt{y}$ — R: $\log a + 2 \log x + \frac{1}{2} \log y$
15. $\log \frac{a \sqrt[3]{b^5}}{x^2 \sqrt{y^3}}$ — R: $\log a + \frac{5}{3} \log b + 2\,\text{colog}\, x + \frac{3}{2}\,\text{colog}\, y$
16. $\log (5 a b)^2 \sqrt{a}$ — R: $2 \log 5 + 2 \log a + 2 \log b + \frac{1}{2} \log a$
17. $\log \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} \cdot a^3}$ — R: $-\left(\frac{2}{3} \log x + 3 \log a\right) = \frac{2}{3}\,\text{colog}\, x + 3\,\text{colog}\, a$
18. $\log \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$ — R: $\log (a + b) + \log (a - b) + \text{colog}\, a + \text{colog}\, b$
19. $\log \sqrt[5]{\left(\frac{a^3 b^2}{3 c^7}\right)^4}$ — R: $\frac{4}{5} [3 \log a + 2 \log b + \text{colog}\, 3 + 7\,\text{colog}\, c]$
20. $\log \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ — R: $\log \pi + \frac{1}{2} (\log l + \text{colog}\, g)$
21. $\log \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}$ — R: $\frac{1}{2} [\log (a + b) + \log (a - b)] + \text{colog}\, b$
22. $\log \sqrt[7]{7 x^2 y^5 z^2}$ — R: $\frac{1}{7} \log 7 + \frac{2}{7} \log x + \frac{5}{7} \log y + \frac{2}{7} \log z$
23. $\log \frac{b^3 \cdot \sqrt{c}}{\sqrt{h}}$ — R: $3 \log b + \frac{1}{2} \log c + \frac{1}{2}\,\text{colog}\, h$
24. $\log h^3 \sqrt[3]{a b^2}$ — R: $3 \log h + \frac{1}{3} \log a + \frac{2}{3} \log b$
25. $\log \sqrt{\frac{a b c^5}{d}}$ — R: $\frac{1}{2} \log a + \frac{1}{2} \log b + \frac{5}{2} \log c + \frac{1}{2}\,\text{colog}\, d$
26. $\log \frac{a^3 \sqrt{x}}{\sqrt[4]{y^3}}$ — R: $3 \log a + \frac{1}{2} \log x + \frac{3}{4}\,\text{colog}\, y$

27. $\log \frac{\sqrt[4]{q^5} \cdot x^3}{\sqrt{p^3}}$ R: $\frac{5}{4} \log q + 3 \log x + \frac{3}{2} \operatorname{colog} p$

28. $\log \sqrt{\frac{a\, b^3\, c^5}{h}}$ R: $\frac{1}{2}$ $(\log a + 3 \log b + 5 \log c + \operatorname{colog} h)$

29. $\log \frac{x^2}{\sqrt[5]{y^2\, z}}$ R: $2 \log x + \frac{2}{5} \operatorname{colog} y + \frac{1}{5} \operatorname{colog} z$

30. $\log \frac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[3]{bd^2}}$ R: $\frac{2}{5} \log a + \frac{1}{3} (\operatorname{colog} b + 2 \operatorname{colog} d)$

Reducir a un logaritmo único las expresiones siguientes:

1. $\log a + \log b - \log c$ R: $\log \frac{a\, b}{c}$

2. $3 \log a + 2 \log b$ R: $\log a^3 b^2$

3. $3 \log a - \log b - 2 \log c$ R: $\log \frac{a^3}{b c^2}$

4. $\frac{1}{2} \log a + \frac{3}{2} \log b$ R: $\log \sqrt{ab^3}$

5. $-\log a - \log b$ R: $\log \frac{1}{a\, b}$

6. $\frac{1}{2} \log a + \frac{3}{2} \log b + \frac{1}{2} \log c$ R: $\log \sqrt{ab^3c}$

7. $3 \log x + \frac{2}{3} \log y + \log (a + b)$ R: $\log\, (a + b)\, x^3 \sqrt[3]{y^2}$

8. $-\log a - \frac{3}{2} \log b$ R: $\log \frac{1}{a \sqrt{b^3}}$

9. $3 \log b + 2 \log c + \frac{1}{2} \log x$ R: $\log b^3 \cdot c^2 \cdot \sqrt{x}$

10. $\log (a + b) - \log (a - b)$ R: $\log \frac{a + b}{a - b}$

11. $\log 8 + \log (a + b) - \log (a - b)$ R: $\log \frac{8\, (a + b)}{a - b}$

12. $2 \log x - 3 \log a - 2 \log b - \log c$ R: $\log \frac{x^2}{a^3\, b^2\, c}$

13. $-2 \log a$ R: $\log \frac{1}{a^2}$

14. $\log 3 - 2 \log b + (-\log c)$ R: $\log \frac{3}{b^2\, c}$

15. $\frac{1}{2} \log 5 + 2 \log a - \log 3$ R: $\log \frac{\sqrt{5}\; a^2}{3}$

16. $3 \log x + 2 \log y - \frac{1}{2} \log z$ R: $\log \frac{x^3\, y^2}{\sqrt{z}}$

17. $\frac{4}{5} \log h + \frac{2}{3} \log x + \frac{1}{3} \log k + \frac{1}{5} \log p$ R: $\log \sqrt[5]{h^4\, p} \cdot \sqrt[3]{x^2\, k}$

18. $\log a + \log b + 3 \log c - \frac{1}{2} \log x$ R: $\log \frac{a\, b\, c^3}{\sqrt{x}}$

19. $\frac{1}{3}$ $(\log p + \log q + 2 \log R)$ R: $\log \sqrt[3]{p\, q\, R^2}$

20. $3 \log y + 2 \log z - 2 \log x$ R: $\log \frac{y^3\, z^2}{x^2}$

21. *Calcular sin emplear tablas el logaritmo de:*

a) 30 ; *b)* 3000 ; *c)* 27 ; *d)* 0,003 ; *e)* 0,0081

sabiendo que $\log 3 = 0{,}47712$.

R: *a)* 1,47712 ; *b)* 3.47712 ; *c)* 1,43136 ; *d)* $\bar{3}$,47712 ; *e)* $\bar{3}$,20412

22. *Calcular sin emplear tablas el logaritmo de:*

a) 4 ; *b)* 8 ; *c)* 20 ; *d)* 25 ; *e)* 2000 ; *f)* 5

g) 0,5 ; *h)* 0,2 ; *i)* 125 ; *j)* 0,256 ; *k)* 625

sabiendo que $\log 2 = 0{,}30103$.

Resolvemos como modelo el *i*). Siendo: $125 = 5^3 = \left(\frac{10}{2}\right)^3 = 10^3 \cdot 2^{-3}$

es $\log 125 = \log 10^3 + \log 2^{-3} = 3 - 3 \log 2 = 3 - 3 \cdot 0{,}30103$

$= 3 - 0{,}90309 = 2{,}09691$

23. *Sabiendo que:* $\log 2 = 0{,}30103$ y $\log 3 = 0{,}47712$ *calcular:*

$\log_6 2$; $\log_6 3$; $\log_6 4$; $\log_6 5$

R: $\log_6 2 = 0{,}36886$; $\log_6 3 = 0{,}61315$; $\log_6 4 = 0{,}73772$; $\log_6 5 = 0{,}89786$

Solución. — Si $\log_6 2 = x$ [1] es $6^x = 2$ por def. de log.

Tomando log de ambos miembros de la igualdad, se tiene:

$x \log 6 = \log 2$ y por [1] $\log_6 2 \,.\, \log 6 = \log 2$

$$\log_6 2 = \frac{\log 2}{\log 6} = \frac{\log 2}{\log 2 + \log 3} = \frac{0{,}30103}{0{,}77815} = 0{,}36886$$

Manejo de tablas. — CALCULAR LOS LOGARITMOS SIGUIENTES:

a) Caso en que las mantisas están en la tabla.

1.	log 1238	= 3, 09272	2.	log 1946	= 3, 28914
3.	log 6784	= 3, 83149	4.	log 7815	= 3, 89293
5.	log 946	= 2, 97589	6.	log 154	= 2, 18752
7.	log 418	= 2, 62118	8.	log 326	= 2, 51322
9.	log 9999	= 3, 99996	10.	log 97	= 1, 98677
11.	log 1,370	= 0, 13672	12.	log 24,76	= 1, 39375
13.	log 298,7	= 2, 47524	14.	log 36,49	= 1, 56217
15.	log 4,750	= 0, 67669	16.	log 47,80	= 1, 67943
17.	log 0,03918	= $\bar{2}$, 59306	18.	log 0,4615	= $\bar{1}$, 66417
19.	log 1,004	= 0, 00173	20.	log 0,00095	= $\bar{4}$, 97772
21.	log 125000	= 5, 09691	22.	log 48000	= 4, 68124
23.	log 670000	= 5, 82607	24.	log 145000	= 5, 16137
25	log 99840	= 4, 99930	26.	log 32000	= 4, 50515
27.	log 400500	= 5, 60260	28.	log 100100	= 5, 00043
29.	log 67040	= 4, 82633	30.	log 7070000	= 6, 84942
31.	log 0,000301	= $\bar{4}$, 47857	32	log 0,30300	= $\bar{1}$, 48144
33.	log 15,010	= 1, 17638	34.	log 8,008	= 0, 90352
35.	log 0,0000911	= $\bar{5}$, 95952	36.	log 0,00000018	= $\bar{7}$, 25527
37.	log 4,004	= 0, 60249	38.	log 10,01	= 1, 00043
39.	log 0,3636	= $\bar{1}$, 56061	40.	log 0,03036	= $\bar{2}$, 48230
41.	log 0,41120	= $\bar{1}$, 61405	42.	log 0,05675	= $\bar{2}$, 75397
43.	log 0,008676	= $\bar{3}$, 93832	44.	log 87,32	= 1, 94111
45.	log 6242	= 3, 79532	46.	log 0,0008563	= $\bar{4}$, 93263
47.	log 0,08718	= $\bar{2}$, 94042	48.	log 0,9668	= $\bar{1}$, 98534
49.	log 0,5726	= $\bar{1}$, 75785	50.	log 0,0000542	= $\bar{5}$, 73400

b) Caso en que las mantisas no están en la tabla.

1.	log 3482,4	= 3, 54188	2.	log 4918,3	= 3, 69182
3.	log 27518	= 4, 43962	4.	log 79913	= 4, 90262
5.	log 3,7158	= 0, 57006	6.	log 5,4936	= 0, 73986
7.	log 67,428	= 1, 82884	8.	log 350,09	= 2, 54418
9.	log 321,17	= 2, 50674	10.	log 488,88	= 2, 68920
11.	log 6,6498	= 0, 82281	12.	log 17,509	= 1, 24327
13.	log 24678	= 4, 39231	14.	log 64957	= 4, 81263
15.	log 64633	= 4, 81045	16.	log 11785	= 4, 07133
17.	log 17522	= 4, 24358	18.	log 24,626	= 1, 39139
19.	log 13,482	= 1, 12975	20.	log 1,5474	= 0, 18960
21.	log 0,43986	= $\bar{1}$, 64331	22.	log 0,32674	= $\bar{1}$, 51420
23.	log 0,96045	= $\bar{1}$, 98248	24.	log 0,11123	= $\bar{1}$, 04622
25.	log 0,18187	= $\bar{1}$, 25976	26.	log 0,012345	= $\bar{2}$, 09150

27. log 0,046328 = $\bar{2},66584$

28. log 0,064382 = 2, 80876

29. log 0,094377 = $\bar{2},97487$

30. log 0,012212 = $\bar{2},08679$

31. log 0,0074798 = $\bar{3},87389$

32. log 0,0023875 = $\bar{3},37794$

33. log 0,0043946 = $\bar{3},64292$

34. log 0,00047489 = $\bar{4},67659$

35. log 0,000018437 = $\bar{5},26569$

36. log 0,0000012949 = $\bar{6},11224$

37 log 0,024522 = $\bar{2},38956$

38. log 0,014523 = $\bar{2},16206$

39. log 0,0084541 = $\bar{3},92707$

40. log 0,00094522 = $\bar{4},97553$

41. log 0,024295 = $\bar{2},38552$

42. log 0,84764 = $\bar{1},92821$

43. log 0,087354 = $\bar{2},94128$

44. log 0,00057562 = $\bar{4},76014$

45. log 0,000087625 = $\bar{5},94263$

46. log 0,072642 = $\bar{2},86119$

47. log 0,12542 = $\bar{1},09837$

48. log 0,084375 = $\bar{2},92622$

49. log 0,0048735 = $\bar{3},68785$

50. log 0,000045331 = $\bar{5},65640$

c) *Caso en que es necesario interpolar más de una cifra.*

1. log 818325 = 5,91292

2. log 0,43838 = $\bar{1}$,80878

3. log 348,638 = 2,53238

4. log 40345,7 = 4,60580

5. log 0,000191919 = $\bar{4}$,28311

6. log 0,0374249 = $\bar{2}$,57318

7. log 0,000000843958 = $\bar{7}$,92632

8. log 300,037 = 2,47718

9. log 606,039 = 2,78250

10. log 2,93813 = 0,46806

PROBLEMA INVERSO. — *Antilogaritmos de logaritmos cuyas mantisas están en la tabla.*

1. log x = 3,98682 R: x=9701

2. log x = 3,95284 R: x=8971

3. log x = 3,85126 R: x=7100

4. log x = 3,84454 R: x=6991

5. log x = 3,49150 R: x=3101

6. log x = 2,50393 R: x=319,1

7. log x = 2,67578 R: x=474

8. log x = 2,75831 R: x=573,2

9. log x = 2,88818 R: x=773

10. log x = 2,87915 R: x=757,1

11. log x = 1,86753 R: x=73,71

12. log x = 1,82105 R: x=66,23

13. log x = 1,80693 R: x=64,11

14. log x = 1,4: 429 R: x=31,21

15. log x = 1,32654 R: x=21,21

16. log x = 4,50393 R: x=31910

17. log x = 4,21325 R: x=16340

18. log x = 4,24130 R: x=17430

19. log x = 4,75488 R: x=56870

20. log x = 4,88564 R: x=76850

21 log x = 5,99917 R: x=998100

22. log x = 5,97557 R: x=945300

23 log x = 5,81763 R: x=657100

24. log x = 5,66633 R: x=463800

25 log x = 5,71542 R: x=519300

26. log x = 6,70859 R: x=5112000

27. log x = 6,88824 R: x=7731000

28. log x = 6,75374 R: x=5672000

29. log x = 6,91551 R: x=8232000

30. log x = 6,94121 R; x=8734000

Antilogaritmos de logaritmos cuyas mantisas no están en las tablas

1 log x = 1,39139 R: x=24,626

2. log x = 1,24327 R: x=17,509

3. log x = 1,82884 R: x=67,428

4. log x = 1,12975 R: x=13,482

5. log x = 1,85581 R: x=71,748

6. log x = 2,85820 R: x=721,43

7. log x = 2,99832 R: x=996,13

8. log x = 2,49191 R: x=310,39

9. log x = 2,67010 R: x=467,84

10. log x = 2,65834 R: x=455,34

11 log x = 3,82382 R: x=6665,3

12. log x = 3,81035 R: x=6461,7

13. log x = 3,75325 R: x=5665,6

14. log x = 3,82624 R: x=6702,5

15. log x = 3,88703 R: x=7709,5

16. log x = 4,82755 R: x=67228

17. log x = 4,88140 R: x=76103

18. log x = 4,88727 R: x=77138

19. log x = 4,96428 R: x=92103

20. log x = 4,85130 R: x=71006

21. log x = 5,87857 R: x=756080

22. log x = 5,90874 R: x=810470

23. log x = 5,93206 R: x=855170

24. log x = 5,66388 R: x=461190

25. log x = 5,67426 R: x=472340

26. log x = 6,49298 R: x=3111600

27. log x = 6,56365 R: x=3661400

28. log x = 6,53788 R: x=3450500

29. $\log x = 6,41785$ R: $x = 2617300$

30. $\log x = 6,32498$ R: $x = 2113400$

31 $\log x = \bar{1},49125$ R: $x = 0,30992$

32. $\log x = \bar{1},55635$ R: $x = 0,36004$

33. $\log x = \bar{1},56210$ R: $x = 0,36484$

34. $\log x = \bar{1},62510$ R: $x = 0,42179$

35. $\log x = \bar{1},67338$ R: $x = 0,47139$

36. $\log x = \bar{2},75775$ R: $x = 0,057246$

37. $\log x = \bar{2},65910$ R: $x = 0,045614$

38. $\log x = \bar{2},71808$ R: $x = 0,052249$

39. $\log x = \bar{2},91444$ R: $x = 0,082117$

40. $\log x = \bar{2},94005$ R: $x = 0,087105$

41. $\log x = \bar{3},85805$ R: $x = 0,0072118$

42. $\log x = \bar{3},84285$ R: $x = 0,0069038$

43. $\log x = \bar{3},50128$ R: $x = 0,0031716$

44. $\log x = \bar{3},50615$ R: $x = 0,0032074$

45. $\log x = \bar{3},34428$ R: $x = 0,0022094$

46. $\log x = \bar{4},43430$ R: $x = 0,0002718$

47. $\log x = \bar{4},62527$ R: $x = 0,00042196$

48. $\log x = \bar{4},71855$ R: $x = 0,0005230$

49. $\log x = \bar{4},94009$ R: $x = 0,00087113$

50. $\log x = \bar{4},08318$ R: $x = 0,00012111$

Cologaritmo. — *Calcular los cologaritmos de los números siguientes:*

1. colog 1238 $= \bar{4},90728$
2. colog 1946 $= \bar{4},71086$
3. colog 946 $= \bar{3},02411$
4. colog 154 $= \bar{3},81248$
5. colog 418 $= \bar{3},37882$
6. colog 326 $= \bar{3},48678$
7. colog 9999 $= \bar{4},00004$
8. colog 97 $= \bar{2},01323$
9. colog 6784 $= \bar{4},16851$
10. colog 7815 $= \bar{4},10707$
11. colog 3482,4 $= \bar{4},45812$
12. colog 4918,3 $= \bar{4},30818$
13. colog 27518 $= \bar{5},56038$
14. colog 79913 $= \bar{5},09738$
15. colog 3,7158 $= \bar{1},42994$
16. colog 67,428 $= \bar{2},17116$
17. colog 350,09 $= \bar{3},45582$
18. colog 321,17 $= \bar{3},49326$
19. colog 488,88 $= \bar{3},31080$
20. colog 1,5474 $= \bar{1},81040$
21. colog 0,32674 $= 0,48580$
22. colog 400500 $= \bar{6},39740$
23. colog 67040 $= \bar{5},17367$
24. colog 15,010 $= \bar{2},82362$
25. colog 8,008 $= \bar{1},09648$
26. colog 0,0000911 $= 4,04048$

27. colog 0,00000018 $= 6,74473$
28. colog 0,012345 $= 1,90850$
29. colog 0,046328 $= 1,33416$
30. colog 0,064382 $= 1,19124$
31. colog 0,094377 $= 1,02513$
32. colog 0,012212 $= 1,91321$
33. colog 0,0074798 $= 2,12611$
34. colog 0,0023875 $= 2,62206$
35. colog 0,0043946 $= 2,35708$
36. colog 0,84764 $= 0,07179$
37. colog 0,087354 $= 1,05872$
38. colog 0,00057562 $= 3,23986$
39. colog 0,000087625 $= 4,05737$
40. colog 0,072642 $= 1,13881$
41. colog 0,12542 $= 0,90163$
42. colog 0,084375 $= 1,07378$
43. colog 0,0048735 $= 2,31215$
44. colog 0,000045331 $= 4,34380$
45. colog 0,0008563 $= 3,06737$
46. colog 1 $= 0$
47. colog 10 $= -1$
48. colog 100 $= -2$
49. colog 100000 $= -5$
50. colog 1000000.000 $= -9$

Multiplicación de un logaritmo con característica negativa por un número natural.

1. $\bar{2},37156 \times 7$ R: $\overline{12},60092$
2. $\bar{7},15386 \times 8$ R: $\overline{55},23088$
3. $\bar{9},30428 \times 6$ R: $\overline{53},82568$
4. $\bar{6},38434 \times 7$ R: $\overline{40},69038$
5. $\bar{7},53624 \times 9$ R: $\overline{59},82616$
6. $\bar{5},28437 \times 6$ R: $\overline{29},70622$
7. $\bar{4},32694 \times 5$ R: $\overline{19},63470$
8. $\bar{9},38435 \times 4$ R: $\overline{35},53740$
9. $\bar{6},51976 \times 9$ R: $\overline{50},67784$
10. $\bar{7},20502 \times 9$ R: $\overline{62},84518$
11. $\overline{17},38425 \times 7$ R: $\overline{117},68975$
12. $\overline{14},35607 \times 6$ R: $\overline{82},13642$
13. $\overline{23},47297 \times 6$ R: $\overline{136},83782$
14. $\bar{1},30747 \times 8$ R: $\bar{6},45976$
15. $\overline{35},27438 \times 9$ R: $\overline{313},46942$
16. $\overline{30},42728 \times 5$ R: $\overline{148},13640$
17. $\bar{7},38546 \times 12$ R: $\overline{80},62552$
18. $\bar{5},38604 \times 17$ R: $\overline{79},56268$
19. $\bar{9},47387 \times 23$ R: $\overline{197},89901$
20. $\bar{8},30975 \times 37$ R: $\overline{285},46075$
21. $\overline{18},38439 \times 16$ R: $\overline{282},15024$
22. $\overline{20},52678 \times 25$ R: $\overline{487},16950$
23. $\overline{24},67295 \times 27$ R: $\overline{430},16965$
24. $\bar{1},62171 \times 43$ R: $\overline{17},73353$

División de un logaritmo con característica negativa por un número natural.

1. $\bar{2},51296 : 2$	R: $\bar{1},25648$	**2.** $\bar{4},66828 : 2$	R: $\bar{2},33414$
3. $\bar{6},32843 : 3$	R: $\bar{2},10948$	**4.** $\overline{10},43960 : 5$	R $\bar{2},08792$
5. $\bar{8},26448 : 4$	R: $\bar{2},06612$	**6.** $\bar{3},41242 : 2$	R: $\bar{2}.70621$
7. $\bar{5},36453 : 3$	R: $\bar{2},45484$	**8.** $\bar{2},46595 : 5$	R: $\bar{1},69319$
9. $\bar{5},43562 : 6$	R: $\bar{1},23927$	**10.** $\bar{1},87922 : 2$	R: $\bar{1},93961$
11. $\bar{4},38643 : 3$	R: $\bar{2},79548$	**12.** $\bar{5},36484 : 4$	R: $\bar{2}.84121$
13. $\bar{3},45698 : 7$	R: $\bar{1},63671$	**14.** $\bar{1},56382 : 3$	R: $\bar{1},85461$
15. $\bar{6},38432 : 8$	R: $\bar{1},29804$	**16.** $\bar{2},43929 : 9$	R: $\bar{1},82659$
17. $\bar{7},63546 : 3$	R: $\bar{3},87849$	**18.** $\bar{8},93526 : 5$	R: $\bar{2},58705$
19. $\overline{10},55638 : 6$	R: $\bar{2},42606$	**20.** $\bar{9},43560 : 10$	R: $\bar{1},14356$
21. $\bar{2},45968 : 12$	R: $\bar{1},87164$	**22.** $\bar{5},43961 : 11$	R: $\bar{1},58542$
23. $\overline{12},45938 : 13$	R: $\bar{1},11226$	**24.** $\bar{6},53840 : 15$	R: $\bar{1},63589$

Cálculo de expresiones en que figuren productos, cocientes, potencias y raíces. — *Cálculo de productos.*

1. $x = 438,91 \times 999,43 \times 0,062731$ — R: $x = 27518,12$
2. $x = 2847,58 \times 3,1416 \times 2,8579$ — R: $x = 25567$
3. $x = 0,9415 \times 52,876 \times 9,8507$ — R: $x = 490,4$
4. $x = 24,15 \times 67,815 \times 0,158 \times 1,4675$ — R: $x = 379,75$
5. $x = 569876 \times 0,01478 \times 0,00947 \times 18,106$ — R: $x = 1444,17$
6. $x = 723817 \times 432,38 \times 0,00384 \times 0,028347$ — R: $x = 33293$
7. $x = 0,0028173 \times 0723,84 \times 68134,8 \times 0,003816$ — R: $x = 9816,5$
8. $x = 0,088776 \times 0,00087913 \times 47396,5 \times 518,94$ — R: $x = 1920,18$
9. $x = 9812,5 \times 0,281764 \times 524,396 \times 0,000038$ — R: $x = 75,466$
10. $x = 381,629 \times 0,86429 \times 5346,9 \times 0,00938$ — R: $x = 16680$

Cálculo de productos y cocientes.

11. $x = 0,0044975 : 0,097693$ — R: $x = 0,046037$
12. $x = 16,789 : 2725000$ — R: $x = 0,000006161$
13. $x = 3798400 : 98579000$ — R: $x = 0,0385309$
14. $x = \dfrac{3,1416}{0,72845}$ — R: $x = 4,3127$
15. $x = \dfrac{197460}{35,487}$ — R: $x = 5564,25$

Empleando cologaritmos o no.

16. $(35,835 \, . \, 54,257) : 96,847$ — R: $x = 20,0762$
17. $x = \dfrac{3,9786 \times 10.58}{0,036757}$ — R: $x = 1145,2$
18. $x = \dfrac{14,296 \times 129.07 \times 0,7584}{87,593}$ — R: $x = 15,976$
19. $x = (36,466 \, . \, 9,895 \, . \, 1278,50) : 2,2786$ — R: $x = 202460$
20. $x = (0,9994 \, . \, 3,1876 \, . \, 0,0479) : 0,0378$ — R: $x = 4,0369$

Empleando cologaritmos.

21. $x = \dfrac{27984}{2,892 \times 77,478}$ — R: $x = 124,85$
22. $x = \dfrac{3,9845}{0,3987 \times 1,4998}$ — R: $x = 6,6635$
23. $x = \dfrac{478970}{236,17 \times 128,45}$ — R: $x = 15,785$
24. $x = \dfrac{6,2832 \times 10,345}{3,1484 \times 43,437}$ — R: $x = 0,4753$
25. $x = \dfrac{12,37 \times 0,836 \times 4500}{929,50 \times 0,0125}$ — R: $x = 4005,30$

Cálculo de potencias.

26. $x = 1{,}0575^{46}$ — R: $x = 13{,}0882$

27. $x = 1{,}0452^{57}$ — R: $x = 12{,}234$

28. $x = 1{,}0075^{300}$ — R: $x = 9{,}4406$

29. $x = 2{,}8735^{5}$ — R: $x = 195{,}93$

30. $x = 37{,}598^{3}$ — R: $x = 53151$

31. $x = 0{,}76485^{4}$ — R: $x = 0{,}34223$

32. $x = 0{,}99752^{10}$ — R: $x = 0{,}97544$

33. $x = 0{,}083^{5}$ — R: $x = 0{,}0000039391$

34. $x = 0{,}84^{7}$ — R: $x = 0{,}29509$

35. $x = 2{,}43^{10}$ — R: $x = 7179{,}7$

Cálculo de productos, cocientes y potencias.

36. $x = 1{,}0575^{46} \times 0{,}8349$ — R: $x = 10{,}927$

37. $x = 28735 \times 1{,}0225^{20}$ — R: $x = 44855$

38. $x = 3{,}1416^{4} \times 0{,}51283^{3}$ — R: $x = 13{,}1373$

39. $x = 34{,}05^{3} \times 0{,}0723^{5} \times 66{,}872^{2}$ — R: $x = 318{,}77$

40. $x = 1{,}045^{25} \times 1{,}0575^{10} \,.\, 1{,}0075^{100}$ — R: $x = 11{,}636$

41. $x = \dfrac{3{,}7896^{4}}{278{,}39}$ — R: $x = 0{,}7530$

42. $x = \dfrac{1219}{1{,}025^{10}}$ — R: $x = 952{,}36$

43. $x = \dfrac{29.365^{3}}{0{,}9898^{10}}$ — R: $x = 28054$

44. $x = \dfrac{7419 \times 0{,}0341^{3}}{4196 \times 0{,}234^{2}}$ — R: $x = 0{,}0012803$

45. $x = \dfrac{3{,}187^{4} \times 65{,}297^{2}}{0{,}275^{3} \times 12{,}785^{5}}$ — R: $x = 67{,}917$

Cálculo de productos, cocientes, potencias y raíces.

46. $x = \sqrt[3]{58974}$ — R: $x = 38{,}9245$

47. $x = \sqrt[3]{12167}$ — R: $x = 23$

48. $x = \sqrt[3]{179880}$ — R: $x = 56{,}45$

49. $x = \sqrt[4]{26000}$ — R: $x = 12{,}698$

50. $x = \sqrt[5]{90999}$ — R: $x = 9{,}8132$

51. $x = \sqrt[5]{6{,}19347}$ — R: $x = 1{,}4401$

52. $x = \sqrt[10]{479830}$ — R: $x = 36{,}989$

53. $x = \sqrt[3]{2{,}4273}$ — R: $x = 1{,}3439$

54. $x = \sqrt[60]{101{,}26}$ — R: $x = 1{,}08$

55. $x = \sqrt[6]{128{,}59}$ — R: $x = 2{,}2467$

56. $x = \sqrt[7]{64{,}687}$ — R: $x = 1{,}8142$

57. $x = \sqrt[4]{0{,}00025218}$ — R: $x = 0{,}1260171$

58. $x = \sqrt[3]{0{,}0000047879}$ — R: $x = 0{,}016854$

59. $x = \sqrt[4]{0{,}00050625}$ — R: $x = 0{,}15$

60. $x = \sqrt[3]{0{,}0097450}$ — R: $x = 0{,}21859$

61. $x = \sqrt{0{,}47896}$ — R: $x = 0{,}69207$

62. $x = \sqrt[10]{0{,}95486}$ — R: $x = 0{,}99538$

63. $x = \sqrt[7]{0,02479}$ R: $x = 0,589671$

64. $x = \sqrt[5]{0,03125}$ R: $x = 0,5$

65. $x = \sqrt[8]{0,0006561}$ R: $x = 0,40005$

66. $x = \sqrt[4]{1,213} \times \sqrt[5]{0,1934}$ R: $x = 0,75555$

67. $x = \dfrac{3,6274 \times \sqrt{218,26}}{0,0925}$ R: $x = 579,3625$

68. $x = \sqrt[3]{0,35^4 : \sqrt{943214}}$ R: $x = 0,0249076$

69. $x = \sqrt[3]{0,09 \sqrt{\dfrac{11}{23}}}$ R: $x = 0,3963$

70. $x = \sqrt[3]{\dfrac{4,2735 \times 5,879}{15,3 \times 4,1986^2}}$ R: $x = 0,4533$

71. $x = \sqrt[3]{\dfrac{57,580}{0,63251 \times 0,001863}}$ R: $x = 36,569$

72. $x = \dfrac{\sqrt{6327} \times \sqrt[3]{452,26}}{\sqrt[4]{8432,75}}$ R: $x = 63,714$

Para el 72 se tiene:

$$\log x = \frac{1}{2} \log 6327 + \frac{1}{3} \log 452,26 + \frac{1}{4} \operatorname{colog} 8432,75$$

73. $x = \dfrac{8,0196 \times \sqrt[3]{0,0312}}{9,01875 \times \sqrt{0,27965}}$ R: $x = 0,52935$

74. $x = \dfrac{8432,75 \times \sqrt[3]{892,36}}{562,76^2 \times \sqrt{8955,70}}$ R: $x = 0,002708$

75. $x = \sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[3]{(531441)^2}}}$ R: $x = 3$

76. $x = \dfrac{0,78925^5 \times 4976,50}{\sqrt[3]{0,326} \times \sqrt{283,48}}$ R: $x = 862,08$

Cálculo de potencias con exponente racional

77. $x = 1,045^{-10}$ ∴ $\log x = 10 \operatorname{colog} 1,045$ R: $x = 0,64534$

78. $x = 8,25^{-5}$ R: $x = 0,000026167$

79. $x = (0,125)^{-3}$ R: $x = 512$

80 $x = 0,93492^{-11}$ R: $x = 2,0961$

81. $x = 0,027279^{-3}$ R: $x = 49262$

82. $x = (246,78)^{\frac{2}{5}}$ R: $x = 39,3436$

83. $x = (0,057432)^{\frac{3}{2}}$ R: $x = 0,0137635$

84. $x = 2.48^{-2}$ R: $x = 0,1926$

85. $x = 0,38^{-6}$ R: $x = 332,14$

86. $x = 0,0177^{\frac{1}{3}}$ R: $x = 0,26061$

87. $x = (1818,70)^{-\frac{3}{2}}$ R: $x = 0,000012894$

88. $x = 25,345^{-\frac{4}{5}}$ R· $x = 0,0075315$

Ejercicios combinados.

89. $x = \dfrac{(0,78925)^5 \times 4976,50}{\left(0,326\sqrt{283,48}\right)^{\frac{1}{3}}}$ R: $x = 861,03$

90. $x = \dfrac{[789,25 \times (25,5672)^3]^{\frac{1}{2}}}{(6332,5)^{\frac{1}{4}} \times 0,6523}$ R: $x = 624.19$

91. $x = \dfrac{(0{,}3551)^{\frac{1}{5}} \times (439{,}86)^{\frac{1}{2}}}{0{,}03036 \times 0{,}04004}$ R: $x = 14026{,}10$

92. $x = \left[\dfrac{29251 \times 0{,}312^{-2}}{8{,}152 \times 293{,}47}\right]^{\frac{1}{4}}$ R: $x = 3{,}353$

93. $x = \dfrac{0{,}38^{-2} \times 7329}{6532^{\frac{1}{2}}}$ R: $x = 628$

Calcular, empleando logaritmos, el exponente x, en las expresiones: *a) Sin emplear tablas* (*).

1. $2^x = 32$ R: $x = 5$ 2. $4^{\frac{x}{6}} = 2$ R: $x = 3$

3. $6^{-\frac{3}{x}} = 36$ R: $x = -\dfrac{3}{2}$ 4. $49^{\frac{1}{x}} = 7$ R: $x = 2$

5. $32^x = \dfrac{1}{128}$ R: $x = -\dfrac{7}{5}$ 6 $\left(\dfrac{1}{16}\right)^x = 8$ R: $-\dfrac{3}{4}$

b) Empleando tablas de logaritmos (hallar tres cifras decimales).

7. $2^x = 10$ R: $x=3{,}3219$ 8. $5^{\frac{2}{x}} = 3$ R: $x = 2{,}929$

9. $7^{\frac{x}{3}} = 4$ R: $x=2{,}137$ 10. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 5$ R: $x = -3{,}969$

11. $31^{\frac{1}{x}} = 4$ R: $x=2{,}477$ 12. $40^{\frac{1}{x}} = 6$ R: $x = 2{,}058$

13. $1000 \,.\, 1{,}06^x = 1338{,}23$ R: $x=5$ 14. $1840 = \dfrac{2000}{1{,}0275^x}$ R: $x = 3{,}086$

15. $328{,}75 . 1{,}025^x = 3287{,}5$ R: $x = 93{,}283$

(*) Véase el ejercicio 40 resuelto en la página 38.

16. $\dfrac{487{,}90}{1{,}025^x} = 9758$ R: $x = -121{,}364$

17. $x^{-4} = 3{,}875$ Solución: Siendo $-4 \log x = \log 3{,}875$ es

$$\log x = \frac{\log 3{,}875}{-4} = \frac{-\log 3{,}875}{4} = \frac{\text{colog } 3{,}875}{4} \quad \therefore \quad x = 0{,}713$$

18. $x^{-1} = 0{,}89475$ R: $x = 1{,}118$

19. $x^{-2} = 15$ R: $x = 0{,}258$

20. $x^{-1{,}5} = 4378$ $\therefore$ $\log x = \dfrac{\log 4378}{-1{,}5}$ R: $x = 0{,}0374$

21. $x^{-3} = 3{,}375$ R: $x = 0{,}66666$

22. $\log (x + 1) - \log (x - 2) - \log 2 = 0$ R: $x = 5$

Solución: $\log \dfrac{x+1}{x-2} = \log 2$ por recip. log. de un cociente

luego $\dfrac{x+1}{x-2} = 2$ por recip. prop. unif. de la log.

de donde $x + 1 = 2x - 4$.

Trasponiendo y reduciendo términos da: $x = 5$.

23. $\log (x + 1) + \log (x + 2) = \log (x^2 + 5)$ R: $x = 1$

24. $\log (2x - 1) + \log x = \log (2x^2 - 3)$ R: $x = 3$

25. $4 \log \dfrac{x}{3} + 3 \log \dfrac{x}{3} = 5 \log x - \log 27$ R: $x = 9$

25'. $4 \log \dfrac{x}{2} + 3 \log \dfrac{x}{3} = 5 \log x - \log x$ R: $x = 4$

26. $\log (3 + x) = 2 \log (3 - \sqrt{x})$ R: $x = 1$

27. $(\log x)^2 = \log x^2$ R: $x = 100$

Resolver los sistemas:

28. $\begin{cases} y^{x} = 10^4 \\ y^{\frac{1}{x}} = 10 \end{cases}$ R: $x = 2$, $y = 100$

29. $\begin{cases} 2^{x+y} = 2 \\ 2^{x-y} = 4 \end{cases}$ R: $x = 1{,}5$, $y = -0{,}5$

Solución: Tomando $\log_2$ de ambos miembros de cada una de las ecuaciones se tiene: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Sumando $2x = 3 \quad \therefore \quad x = \frac{3}{2}$

Restando $2y = -1 \quad \therefore \quad y = -\frac{1}{2}$

30. $\begin{cases} 10^{x+3y} = 100^{x} \\ 4^{x-y} = 16 \end{cases}$ R: $x = 3$, $y = 1$

31. $\begin{cases} 5^{x+y} = 25 \\ 3^{x+2y} = 27 \end{cases}$ R: $x = 1$, $y = 1$

32. $\begin{cases} 5^{x+2y} = 10 \\ 7^{x+y} = 10 \end{cases}$ R: $x = \dfrac{2\log 5 - \log 7}{\log 5 \,.\, \log 7}$, $y = \dfrac{\log 7 - \log 5}{\log 5 \,.\, \log 7}$

33. Probar que: *a*) $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}} = 3$;

b) $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}} = 4$ (*).

SOLUCIÓN del *b*): $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}} = -\log_2 \log_2 \sqrt[16]{2} =$

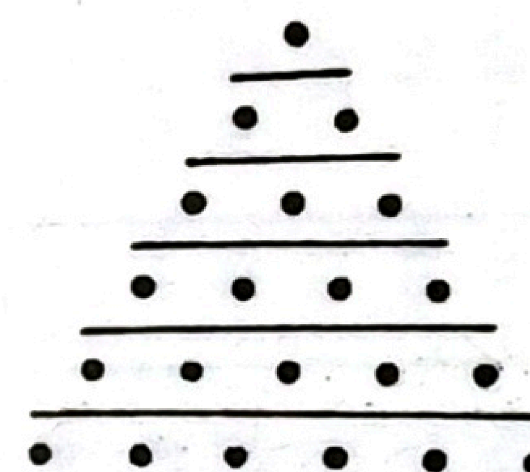
$= -\log_2 \log_2 2^{\frac{1}{16}} = -\log_2 \dfrac{1}{16} = -\log_2 2^{-4} = -(-4) = 4$

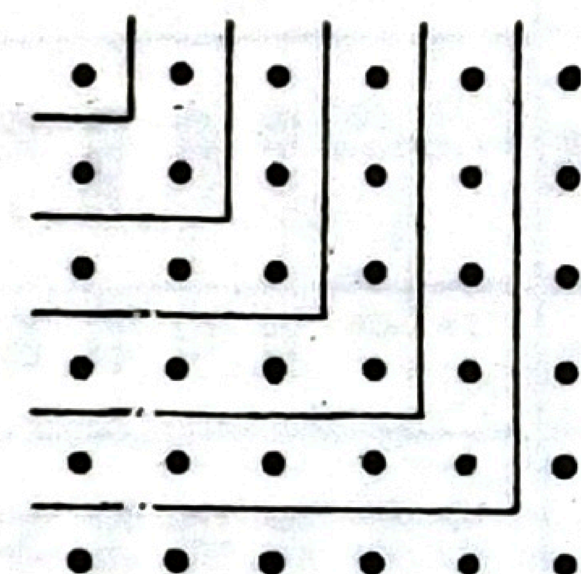
por raíz de raíz, potencia de exp. frac. cor. de la def. de log. y contrario de un número.

(*) Es una solución del problema: *Representar al número cuatro empleando tres cifras 2.*

PROGRESIONES ARITMETICAS

Los pitagóricos estudiando los *números figurados triangulares y cuadrangulares* que representamos a continuación





obtuvieron los resultados

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}; \quad 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$$

Indicar si los siguientes conjuntos de números son términos consecutivos de progresiones aritméticas.

1. 4, 9, 14, 19 R: Si porque $9 - 4 = 14 - 9 = 19 - 14 = 5$
2. 6, 4, 2, 0 R: Si porque $4 - 6 = 2 - 4 = 0 - 2 = -2$
3. 7, 10, 12, 14 R: No porque $10 - 7 \neq 12 - 10 = 14 - 12$
4. 21, 18, 15, 11 R: No porque $18 - 21 = 15 - 18 \neq 11 - 15$
5. $\frac{3}{2}$, 2, 2,5, 3 R: Si porque $2 - \frac{3}{2} = 2{,}5 - 2 = 3 - 2{,}5 = 0{,}5$

Escribir la expresión del enésimo término de las progresiones aritméticas en las cuales a_1 y d tienen los siguientes valores:

6. 1 y 1 R: $a_n = 1 + (n-1) \,.\, 1 = 1 + n - 1 = n$
7. 0 y −2 R: $a_n = 0 + (n-1)(-2) = -2n + 2 = 2(1 - n)$
8. 1 y −1 R: $a_n = 1 + (n-1)(-1) = 1 - n + 1 = 2 - n$
9. 3 y 3 R: $a_n = 3 + (n-1)\,3 = 3 + 3n - 3 = 3n$
10. 2 y 1 R: $a_n = 2 + (n-1) \,.\, 1 = 2 + n - 1 = n + 1$

Dados tres de los números n, a_1, a_n y d calcular el cuarto, o sea, llenar las casillas en blanco de cada uno de los renglones del siguiente cuadro. R significa respuesta

1 Ejercicio No.	n 2	a_1 3	a_n 4	d 5	S 6	R 7	8 Ejercicio No.	n 9	a_1 10	a_n 11	d 12	S 13	R 14
11	10	8	....	2	170	26	56	7	1	19	....	70	3
12	11	3	....	5	308	53	57	9	3	19	....	99	2
13	26	25	....	25	8775	650	58	13	5	65	....	455	5
14	22	2	....	3	737	65	59	13	71	59	....	845	−1
15	73	6	....	9	24 090	654	60	25	12	18	....	375	0,25
16	21	−2	....	4	798	78	61	25	3	123	....	1575	5
17	17	−1	....	5	663	79	62	48	8	290	....	7152	6
18	21	−100	....	5	−1050	0	63	13	71	59	....	845	−1
19	401	−1000	....	5	0	1000	64	101	10	−890	....	−44440	−9
20	100	−100	....	10	39500	890	65	29	4	−108	....	−1508	−4
21	45	86	....	−3	900	−46	66	109	71	−37	....	1853	−1
22	37	12	....	−5	−2886	−168	67	81	−2	30	....	1134	0,4
23	9	100	....	−10	540	20	68	37	2	−7	....	−92,5	−0,25
24	25	12	....	−12	−3300	−276	69	16	−45	0	....	−360	−3
25	51	0	....	−15	−19 125	−750	70	22	40	−2	....	418	−2
26	9	−100	....	−10	−1260	−180	71	37	7,5	18,3	....	477,3	0,3
27	26	−25	....	−25	−8775	−650	72	26	10,45	25,95	....	473,2	0,62
28	41	−1	....	−5	−4141	−201	73	21	0,83	1,93	....	28,98	0,055
29	16	1,5	....	0,5	84	9	74	17	1,5	25,50	....	229,5	1,5
30	35	1,6	....	0,6	413	22	75	23	0,4	−65,6	....	−749,8	−3
31	102	0,75	....	0,25	1364,25	26	76	65	$\frac{1}{3}$	$\frac{65}{3}$	....	715	$\frac{1}{3}$
32	6	$\frac{13}{7}$	....	$\frac{3}{7}$	$\frac{123}{7}$	4	77	25	0,75	−17,25	....	−206,25	−0,75

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
33	48	$\frac{2}{3}$	....	$\frac{2}{3}$	784	32	78	98	0,3	10	....	504,7	0,1
34	26	$-\frac{1}{3}$	....	$\frac{1}{3}$	$99\frac{2}{3}$	8	79	14	0,75	10,5	....	78,75	0,75
35	25	12	....	0,25	375	18	80	......	6	418	4	22048	104
36	9	....	31	3	171	7	81	......	25	150	5	2275	26
37	12	....	60	5	390	5	82	......	0	36	2	342	19
38	48	....	150	3	3816	9	83	......	2	46	4	288	12
39	45	....	183	3	5265	51	84	......	11	56	3	536	16
40	83	....	494	6	20584	2	85	......	45	−1	−2	528	24
41	17	....	30	2	238	−2	86	......	8	−7	−3	3	6
42	64	....	−170	−3	−4832	19	87	......	0	−30	−3	−165	11
43	64	....	−382	−6	−12352	−4	88	......	−1	−100	−11	−505	10
44	13	....	−45	−4	−273	3	89	......	−5	−105	−11	−550	11
45	36	....	−187	−5	−3582	−12	90	......	−8	−218	−5	−4859	48
46	15	....	49	3,5	367,5	0	91	......	−3	−113	−5	−1334	28
47	55	....	130	2,4	3586	0,4	92	......	−8	27	5	76	8
48	12	....	3,25	0,25	22,50	0,5	93	......	−16	90	2	1998	54
49	48	....	25,65	0,75	385,20	−9,60	94	......	28,5	1,5	−1,5	285	19
50	1000	....	100	0,1	50050	0,1	95	......	−0,25	0,25	0,05	0	11
51	23	....	−17,25	−0,75	−207	−0,75	96	......	−3,43	3,43	0,01	0	687
52	12	....	3,2	0,2	25,2	1	97	......	$-\frac{1}{6}$	2,5	$\frac{1}{3}$	10,5	9
53	21	....	−9,75	−0,5	−99,75	0,25	98	......	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{25}{6}$	5
54	23	....	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{11}$	34,5	$\frac{1}{2}$	99	......	$-\frac{1}{3}$	−15	$-\frac{4}{3}$	−92	12
55	42	....	$-\frac{746}{3}$	−3	−5239,5	$-\frac{377}{3}$	100	......	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	7

101. *Hallar la suma de los 10000 primeros números naturales, excluyendo el cero.*
R: 50005000

102. *Calcular la suma de los 20 primeros términos de la progresión 2; 2,2; 2,4...*
R: 78

103. *Calcular la suma de los diez primeros términos de la progresión* $(3+\sqrt{2})$, 3, $(3-\sqrt{2}),\ldots$
R: $30-35\sqrt{2}$

104. *Hallar la suma de los n primeros números naturales no nulos.* R: $\dfrac{n(n+1)}{2}$

105. *Hallar la suma de los 40 primeros múltiplos de 3 distintos de cero.* R: 2460

106. *Idem de los 100 primeros términos de la progresión 3 c, c, —c...* R: $-9600\,c$

107. *Hallar la suma de los n primeros números pares distintos de cero.*
R: $S=n(n+1)$

108. *Hallar a suma d los n primeros números impares.* R: $S=n$

109. *Expresar la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética en función del primer término de la razón y de n.*
R: $2S=[2a_1+(n-1).d]n.$

110. *Hallar la suma de los múltiplos de: a) 3; b) 4; c) 5; d) 6; e) 7 comprendidos entre 200 y 300.*

Como modelo resolvemos el ejercicio *a*).

Para hallar cuántos múltiplos de 3 hay entre 200 y 300 consideremos que,

siendo: $\begin{array}{r|l} 200 & 3 \\ \hline 2 & 66 \end{array}$ es $66.3<200<67.3=201$ luego 201 es el *menor* múltiplo de 3 *mayor* que 200, y como

$\begin{array}{r|l} 300 & 3 \\ \hline 0 & 100 \end{array}$ es $100.3=300$ luego $99.3=297$ es el *mayor* múltiplo de 3 *menor* que 300.

Es decir los números cuya suma buscamos son

$$201\ ;\ 204\ ;\ 207\ ;\ \ldots\ldots\ ;\ 291\ ;\ 294\ ;\ 297$$

que forman una progresión aritmética de razón $d=3$. El número n de esos términos lo deducimos de la fórmula fundamental, puesto que de

$$297=201+(n-1).3 \quad \text{resulta} \quad n=\frac{297-201}{3}+1=33$$

y por consiguiente la suma buscada es

$$S=\frac{201+297}{2}.33=\frac{498}{2}.33=249.33=8212$$

R.: *b*) 6000; *c*) 4750; *d*) 3984; *e*) 3479.

110.' *Justificar, empleando el método seguido en la resolución del ejercicio anterior, que la suma de los múltiplos de 9 comprendidos entre 1358 y 4321 es de 938 385.*

110''. *Una persona debe tomar una medicina en la siguiente forma: 2 gotas el primer día, 4 el segundo, 6 el tercero y continuar así hasta tomar 20 gotas, para luego ir disminuyendo una gota por día hasta volver a las 2 gotas. ¿Cuántos días tardará en hacer esa cura y cuántas gotas habrá tomado?*
R.: 29 días; 319 gotas

110'''. *Un reloj señala con campanadas únicamente las horas; otro da, además, una campanada cada media hora y un tercero señala las horas en la forma indicada y, además, da una campanada para indicar el primer cuarto de cada hora, dos para la media hora y tres para los tres cuartos. ¿Cuántas campanadas da cada uno de los relojes en 12 horas?*

R.: $1+2+\ldots+12=66$ camp. el 1º; $66+12=88$ el 2º; $(1+2+3).12+66=138$ el 3º.

111. *Hallar la suma de los 2 n primeros múltiplos de n distintos de cero.*
R: $S=n^2(1+2n)$

112. *Calcular las sumas de los términos de las progresiones aritméticas con los datos de los ejercicios 11 a 100 del cuadro anterior, vale decir, verificar si son correctos los valores indicados en las columnas 6ª y 13ª del mencionado cuadro.*

Hallar el primer término a_1 *y el último* a_n *de una progresión aritmética sabiendo que:*

113. $n=24;\ d=3;\quad S=924$ R: $a_1=4;\quad a_n=73$

114. $n=104;\ d=4;\quad S=22048$ R: $a_1=6;\quad a_n=418$

115. $n=46;\ d=-2;\quad S=-2208$ R: $a_1=-3;\ a_n=-93$

116. $n=15;\ d=-5;\quad S=-150$ R: $a_1=25;\quad a_n=-45$

117. $n=22;\ d=-\dfrac{2}{3};\ S=-66$ R: $a_1=4;\quad a_n=-10$

Para que sirva de modelo resolvemos el ejercicio 113.

Siendo $a_n=a_1+(n-1)\,d$ y $S=(a_1+a_n)\dfrac{n}{2}$,

reemplazando los datos por sus valores, a_1 por x y a_n por y, se tie-

ne el sistema

$$\begin{cases} y = x + (24-1)\,3 \\ 924 = (x+y)\,12 \end{cases} \quad \text{o sea} \quad \begin{cases} x - y = -69 \\ x + y = 77 \end{cases}$$

Sumando m. a m. $\qquad 2x = 8 \quad \therefore \quad x = 4$

Restando m. a m. $\qquad -2y = -146 \quad \therefore \quad y = 73$

luego $\qquad a_1 = x = 4 \quad$ y $\quad a_n = y = 73$.

118. *Resolver los ejercicios análogos a los anteriores tomando del cuadro los datos que figuran en las columnas que llevan los números a) 2, 5 y 6; b) 9, 13 y 14.*

Hallar el primer término a_1 y la razón d de una progresión aritmética sabiendo que:

119. $n = 25$; $a_n = 47$; $S = 575$ — R: $a_1 = -1$; $d = 2$

120. $n = 47$; $a_n = 181$; $S = 4183$ — R: $a_1 = -3$; $d = 4$

121. $n = 17$; $a_n = 145$; $S = 3145$ — R: $a_1 = 225$; $d = -5$

122. $n = 33$; $a_n = -2$; $S = 198$ — R: $a_1 = 14$; $d = -\frac{1}{2}$

123. $n = 43$; $a_n = \frac{57}{4}$; $S = 311\frac{3}{4}$ — R: $a_1 = \frac{1}{4}$; $d = \frac{1}{3}$

Para que sirva de modelo resolvemos el ejercicio 122. Procediendo como en la resolución del número 113 se tiene el sistema

$$\begin{cases} -2 = x + (33-1)\,y \\ 198 = (x-2)\,\dfrac{33}{2} \end{cases} \quad \text{o sea} \quad \begin{cases} x + 32y = -2 \\ x = \dfrac{198 \,.\, 2}{33} + 2 = 14 \end{cases}$$

reemplazando el valor de x en primera ecuación, se tiene

$$14 + 32y = -2 \quad \therefore \quad 32y = -16 \quad \therefore \quad y = -\frac{1}{2}$$

luego $\qquad a_1 = x = 14 \quad ; \quad d = y = -\frac{1}{2}$

124. *Resolver los ejercicios análogos a los anteriores tomando del cuadro los datos que figuran en las columnas que llevan los números: a) 2, 4 y 6; b) 9, 11 y 13.*

Hallar el primer término a_1 y la suma S de los términos de una progresión aritmética sabiendo que:

126. $n = 25$; $a_n = 79$; $d = 3$ — R: $a_1 = 7$; $S = 1075$

127. $n = 47$; $a_n = 239$; $d = 5$ — R: $a_1 = 9$; $S = 5828$

128. $n = 22$; $a_n = 24$; $d = \frac{5}{7}$ — R: $a_1 = 9$; $S = 363$

129. $n = 15$; $a_n = -4$; $d = \frac{1}{7}$ — R: $a_1 = -6$; $S = -75$

130. $n = 55$; $a_n = 93\frac{2}{3}$; $d = \frac{5}{3}$ — R: $a_1 = 3\frac{2}{3}$; $S = 2676\frac{2}{3}$

Resolviendo el ejercicio 129 con el mismo procedimiento seguido anteriormente resulta, el sistema

$$\begin{cases} -4 = x + 14 \,.\, \dfrac{1}{7} \\ y = (x-4) \,.\, \dfrac{15}{2} \end{cases} \quad \text{o sea} \quad \begin{cases} x = -4 - 2 = -6 \\ 2y = 15x - 60 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x = -6 \\ 15x - 2y = 60 \end{cases}$$

reemplazando el valor de x en la segunda ecuación, resulta

$$-90 - 2y = 60 \quad \therefore \quad -2y = 150 \quad \therefore \quad y = -75$$

luego $\qquad a_1 = x = -6 \quad$ y $\quad S = y = -75$

131. Resolver los ejercicios de este tipo que resultan de tomar los datos de las columnas del cuadro que llevan los números *a*) 2, 4 y 5; *b*) 9, 12 y 13.

Hallar el último término a_n y la razón d de una progresión aritmética sabiendo que:

132. $n = 19$; $a_1 = 12$; $S = 570$ — R: $a_n = 48$; $d = 2$

133. $n = 31$; $a_1 = -45$; $S = 0$ — R: $a_n = 45$; $d = 3$

134. $n = 12$; $a_1 = -25$; $S = 30$ — R: $a_n = 30$; $d = 5$

135. $n = 35$; $a_1 = -\frac{5}{4}$; $S = -281\frac{3}{4}$ — R: $a_n = -14\frac{17}{20}$; $d = -\frac{2}{5}$

136 $n = 121$; $a_1 = -95\frac{2}{3}$; $S = -5525\frac{2}{3}$ — R: $a_n = 4\frac{1}{3}$; $d = \frac{5}{6}$

Resolvemos el ejercicio 134 como modelo de los de este tipo **mediante el** sistema

$$\begin{cases} x = -25 + 11\,y \\ 30 = (-25 + x)\,6 \end{cases} \quad \text{o sea} \quad \begin{cases} x - 11\,y = -25 \\ x - 25 = 5 \end{cases} \quad \therefore \quad x = 30$$

Reemplazando este valor de x en la primera ecuación, se tiene:

$$30 - 11\,y = -25 \quad \text{y despejando } y, \text{ da} \quad y = \frac{-25 - 30}{-11} = 5$$

luego $$a_n = x = 30 \quad \text{y} \quad d = y = 5$$

137. *Resolver ejercicios análogos a los anteriores tomando del cuadro los datos que figuran en las columnas que llevan los números: a)* 2, 3 *y* 6; *y b)* 9, 10 *y* 13.

Hallar el último término a_n *y la suma* S *de todos los términos de una progresión aritmética sabiendo que:*

138. $n = 14;\ a_1 = 1{,}5;\ d = 1$ — **R:** $a_n = 14{,}5 \quad S = 112$

139 $n = 13;\ a_1 = 0;\ d = -2$ — **R:** $a_n = -24;\ S = -156$

140. $n = 10;\ a_1 = -2;\ d = 1\frac{5}{9}$ — **R:** $a_n = 12;\quad S = 50$

141. $n = 100;\ a_1 = 1\ d = 2$ — **R:** $a_n = 199;\quad S = 10000$

142. $n = 10;\ a_1 = -1{,}5;\ d = \frac{1}{3}$ — **R:** $a_n = 1{,}5;\quad S = 0$

Tomamos como ejercicio modelo al 139 y lo resolvemos **mediante el sistema**

$$\begin{cases} x = 0 + 12\,(-2) \\ y = (0 + x)\,\dfrac{13}{2} \end{cases} \quad \text{o sea} \quad \begin{cases} x = -24 \\ y = \dfrac{13}{2}\,x \end{cases}$$

Reemplazando el valor de x en la segunda ecuación, resulta:

$$y = \frac{13}{2} \cdot -24 = 13 \cdot -12 = -156$$

luego $$a_n = x = -24 \quad \text{y} \quad S = y = 156$$

143. *Resolver los ejercicios del tipo de los anteriores que se obtienen al tomar los datos que figuran en las columnas del cuadro que llevan los números: a)* 2, 3 *y* 5; *b)* 9, 10 *y* 12.

Hallar la razón y la suma S *de los términos de una progresión aritmética sabiendo que:*

144. $n = 15;\ a_1 = 5;\ a_n = -9$ — R: $d = -1;\ S = -30$

145. $n = 22;\ a_1 = 1;\ a_n = 8$ — R: $d = \frac{1}{3};\ S = 99$

146. $n = 5;\ a_1 = 4\sqrt{2};\ a_n = 8\sqrt{2}$ — R: $d = \sqrt{2};\ S = 30\sqrt{2}$

147. $n = 10;\ a_1 = 3 + \sqrt{2};\ a_n = 3 - 8\sqrt{2}$ — R: $d = -\sqrt{2};\ S = 30 - 35\sqrt{2}$

148. $n = 17;\ a_1 = 32;\ a_n = -32$ — R: $d = -4;\ S = 4$

Resolvemos como ejercicio modelo de los de este tipo al 148 mediante el **sistema:**

$$\begin{cases} -32 = 32 + 16\,x \\ y = \dfrac{32 - 32}{2} \cdot 17 \end{cases} \quad \text{o sea} \quad \begin{cases} 16\,x = -32 - 32 \quad \therefore \quad x = \dfrac{-64}{16} = -4 \\ y = 0 \cdot 17 \quad \therefore \quad y = 0 \end{cases}$$

uego $$d = x = -4 \quad \text{y} \quad S = y = 0$$

149. *Resuélvanse los ejercicios del tipo de los anteriores que se obtienen de tomar los datos de las columnas del cuadro que llevan los números: a)* 2, 3 *y* 4; *b)* 9, 10 *y* 11.

150. *Calcular los ángulos del pentágono* ABCDE *sabiendo que* A *es recto y que dichos ángulos están en progresión aritmética.*

R: B = 99°; C = 108°; D = 117°; E = 126°

151. *¿Qué suma se lograría formar colocando* 150 $ *al comienzo de cada año a interés simple: a) al* 3 % *en* 12 *años; b) al* 5 % *en* 25 *años; c) al* 1,5 % *en* 20 *años; d) al* 6 % *en* 6 *años; e) al* 4 % *en* 25 *años?*

R: *a)* $150\,\dfrac{2 \cdot 12 + 13 \cdot 12 \cdot 0{,}03}{2} = 2151$ $; *b)* 6187 $

c) 3047,25 $; *d)* 1089 $; *e)* 5600 $

152. *Para hacer herrar a un caballo, ¿qué conviene más: pagar* 1,50 $ *por herradura, ó* 1 *centavo por el primer clavo,* 3 *centavos por el segundo,* 5 *centavos por el tercero, etc., y así sucesivamente, hasta clavar el último clavo? Cada herradura lleva* 7 *clavos ¿Cuánto se ahorra al aceptar el medio más conveniente?* R: Conviene más pagar 1,50 $ por herradura, y se ahorran 1,84 $

153. *El perímetro de un triángulo rectángulo es de* 1,80 m. *Calcular las longitudes de sus lados sabiendo que están en progresión aritmética.*

R: 45 cm, 60 cm y 75 cm

154. *Ocho personas se han repartido entre ellas* $ 2000 *en cierto orden y de manera tal que, en ese orden, cada persona recibe* 10 $ *más que la precedente ¿Cuánto le toca a cada una?* R: 215 $, 225 $, 235 $, … 285 $

155. *Para adoquinar una calle, se va echando sobre el contrapiso, un carro de arena cada 5 metros. Esta se trae de un corralón que dista 300 m del lugar donde se vuelca el primer carro. ¿Cuál es el recorrido de éste cuando se ha llegado a volcar el último carro a 250 m a partir del primero?* R: 43 km 350 m

156. *¿Cuál es la longitud de un hilo arrollado fuertemente sobre un cono si el arrollamiento consta de 40 vueltas completas y las dos mayores tienen 24 dm y 23,5 dm de longitud, respectivamente?* R.: 57 m.

157. *Si una rueda está girando a 840 revoluciones por segundo y mediante un freno se va reduciendo su velocidad a razón de 60 revoluciones por segundo ¿al cabo de cuántos segundos se detiene?* R.: 15 s.

158. *Un cuerpo que cae libremente en el vacío recorre 4,90 m en el primer segundo, 14,70 m en el segundo, 24,50 m en el tercer segundo... ¿qué distancia recorre en el sexto segundo? ¿Qué distancia recorre en 10 segundos?* R.: 53,90 m/s. ; 490 m.

159. *Un jardinero debe regar 60 rosales colocados en línea recta con una separación de 1 m entre cada dos de ellos. ¿Cuántos metros recorre si utiliza una regadera que le permite regar 3 rosales en cada viaje y la llena en una canilla situada en la semirrecta opuesta a la que contiene los rosales a 15 m del primer rosal?* (Guiarse por una figura). R: 1820 m.

Interpolación de medios diferenciales.

160. 4 *medios entre* 100 *y* 200 — R: 120, 140, 160, 180

161. 10 „ „ 11 *y* 99 — R: 19, 27, 35, 43, 51, 59, 67, 75, 83, 91

162. 3 „ „ 30 *y* 400 — R: 122,5, 215, 307,5

163. 2 „ „ a *y* c — R: $\frac{2a+c}{3}$; $\frac{a+2c}{3}$

164. 1 *medio entre* x *y* $-x$ — R: 0

165. 1 „ „ $a+b$ *y* $a-b$ — R: a

166. 8 *medios entre* 42 *y* 15 — R: 39, 36, 33, 30, 27, 24, 21, 18

167. 3 „ „ −8 *y* 2 — R: −5,5, −3, −0,5

168. 2 „ „ 40 *y* 5 — R: $28\frac{1}{3}$, $16\frac{2}{3}$

169. 4 „ „ 5 *y* 40 — R: 12, 19, 26, 13

170. 4 „ „ −0,1 *y* 1,4 — R: 0,2, 0,5, 0,8, 1,1

Hallar la media aritmética entre:

171. 18 *y* 60 — R: 39

171'. 30 *y* 400 — R: 215

172. −7 *y* 5 — R: −1

172'. −59 *y* −83 — R: −71

173. $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{5}{2}$ — R: $\frac{3}{2}$

174. 8,5 *y* −3,5 — R: 2,5

175. $2+\sqrt{3}$ *y* $2-\sqrt{3}$ — R: 2

176. $1+\sqrt{2}$ *y* $5-\sqrt{2}$ — R: 3

177. x *y* $-x$ — R: 0

178. x *y* $x-2y$ — R: $x-y$

179. $m+n$ *y* $m-n$ — R: m

180. $3a-b$ *y* $3b-a$ — R: $a+b$

181. Extrapolación. — *Dados los números 2 y 11 hallar 3 números que precedan a 2 y 4 que sigan a 11 y sean tales que ellos y los dados formen una progresión aritmética de la cual 2 sea el cuarto término y 11 el séptimo.*

Solución. — Siendo 2 el cuarto término y 11 el séptimo la razón de interpolación es

$$d = \frac{11-2}{2+1} = \frac{9}{3} = 3$$

los números que anteceden a 2 son $2-3=-1$; $-1-3=-4$; $-4-3=7$, y los que siguen a 11

$$11+3=14 \;;\; 14+3=17 \;;\; 17+3=20 \text{ y } 20+3=23$$

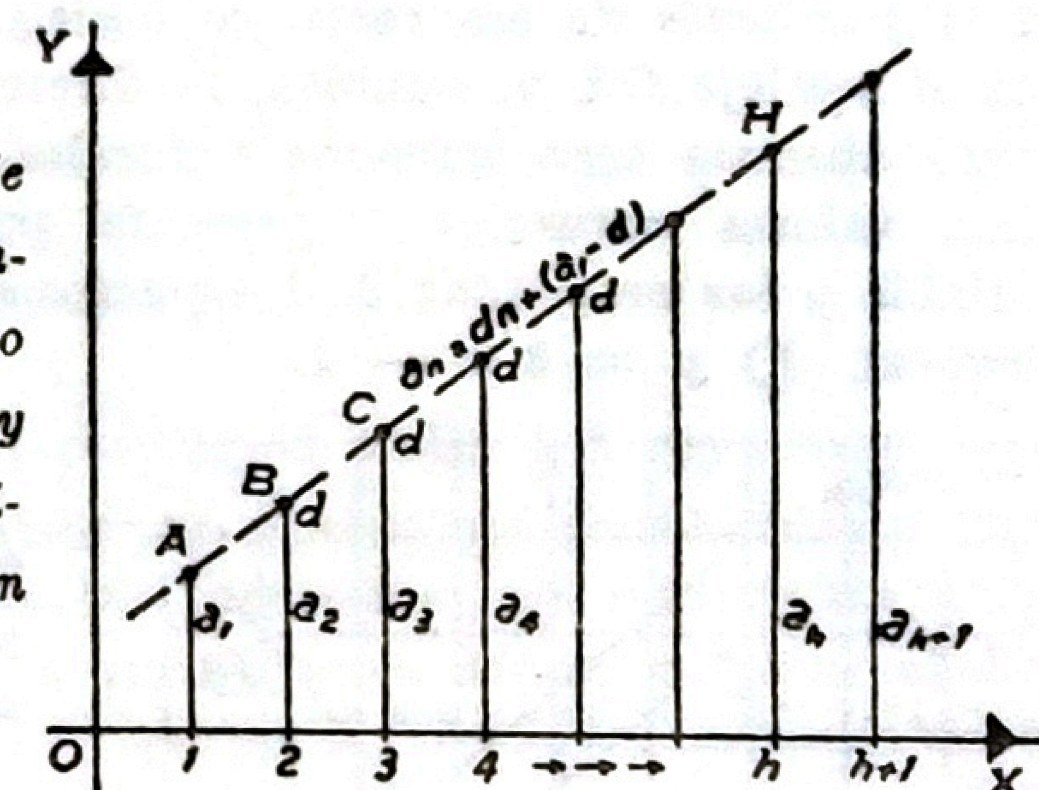
y la progresión que forman ellos y los dos dados

$$-7 \;;\; -4 \;;\; -1 \;;\; 2 \;;\; 5 \;;\; 8 \;;\; 11 \;;\; 14 \;;\; 17 \;;\; 20 \;;\; 23$$

Se dice que se *interpolado* los números 5 y 8 y *extrapolado* los números

$$-7 \;;\; -4 \;;\; -1 \;;\; 14 \;;\; 17 \;;\; 20 \;;\; 23$$

182. *Representar los términos de una progresión aritmética por los puntos que tienen por abscisa al número que indica el orden de ese término y por ordenada al valor del mismo y verificar que los puntos obtenidos están alineados.*



El resultado obtenido no es casual sino consecuencia del hecho de que siendo

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

es

$$a_n = a_1 + dn - d$$

o bien $a_n = dn + (a_1 - d)$ y como d, y a_1 son constantes, resulta que a_n es una función lineal de la variable independiente n (que sólo toma valores

naturales) y por lo tanto los puntos cuyas coordenadas son valores correspondientes en esa función están alineados. (*Matemáticas* III, págs. 237 y 238). Luego, como para

$n = 1$ es $a_n = d \cdot 1 + a_1 - d = a_1$ se tiene A $(1 ; a_1)$

$n = 2$,, $a_n = d \cdot 2 + a_1 - d = a_1 + d = a_2$,, ,, B $(2 ; a_2)$

$n = 3$,, $a_n = d \cdot 3 + a_1 - d = a_1 + 2d = a_3$,, ,, C $(3 ; a_3)$

....

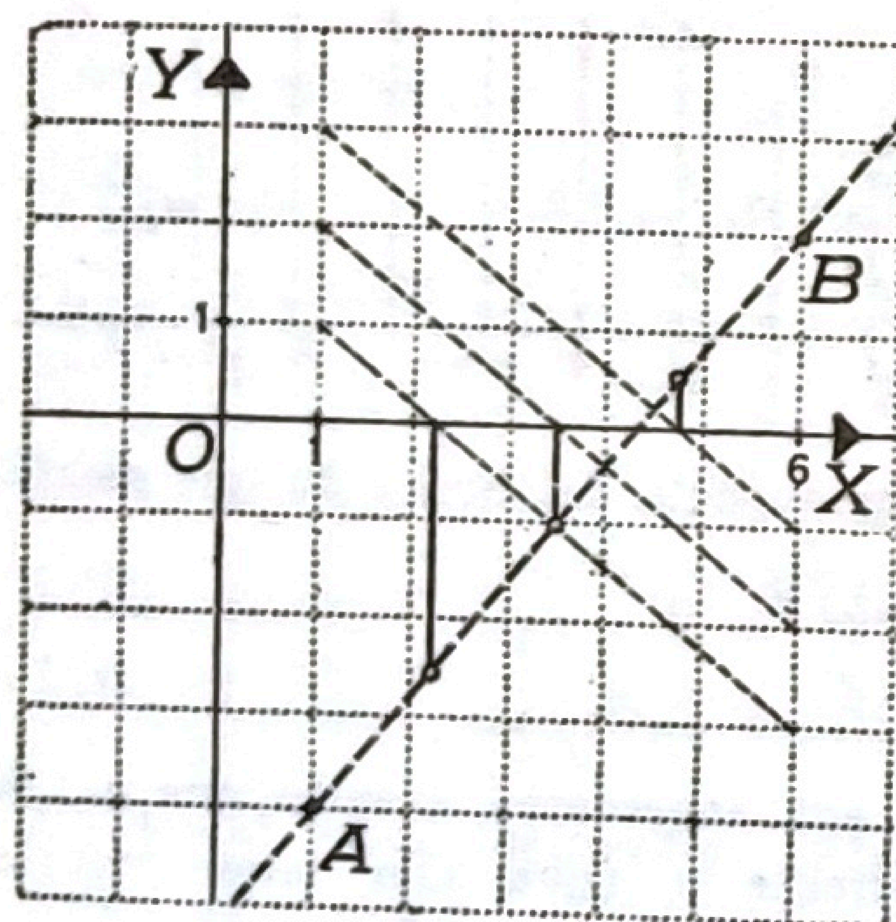
....

$n = h$,, $a_n = d \cdot h + a_1 - d = a_1 + (h-1)d = a_h$,, ,, H $(h ; a)$

los puntos A, B, C, ... H, están en una misma recta.

183. *Dadas las funciones lineales a)* $y = 2x + 3$; *b)* $y = -x + 2$; *c)* $y = \frac{1}{2}x - 4$ *hallar los valores de y que resultan al dar a x los valores* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 *y verificar que así se obtienen términos consecutivos de sendas progresiones aritméticas.*

184. *¿Mediante qué función lineal pueden determinarse los términos de la siguiente progresión aritmética: a)* ÷ 1, 5, 7, 9, ...; *b)* ÷ —1, 2, 5, 7? *¿Qué significado geométrico tienen: el primer término; la razón y las variables x e y?* R.: *a)* $y = 2x + 5$; el primer término es la ordenada del punto en que la recta $y = 2x + 5$ corta al eje OY (*ordenada al origen*); la razón es la *pendiente* de esa recta, es decir, la tangente del ángulo que ella forma con el semieje OX y, también, la diferencia entre las ordenadas de dos puntos cuyas abscisas sean números naturales consecutivos; la variable x (que sólo toma valores naturales) representa puntos equidistantes del eje OX y la variable y las ordenadas de los puntos de la mencionada recta que tienen esas abscisas. *b)* $y = 3x - 1$.

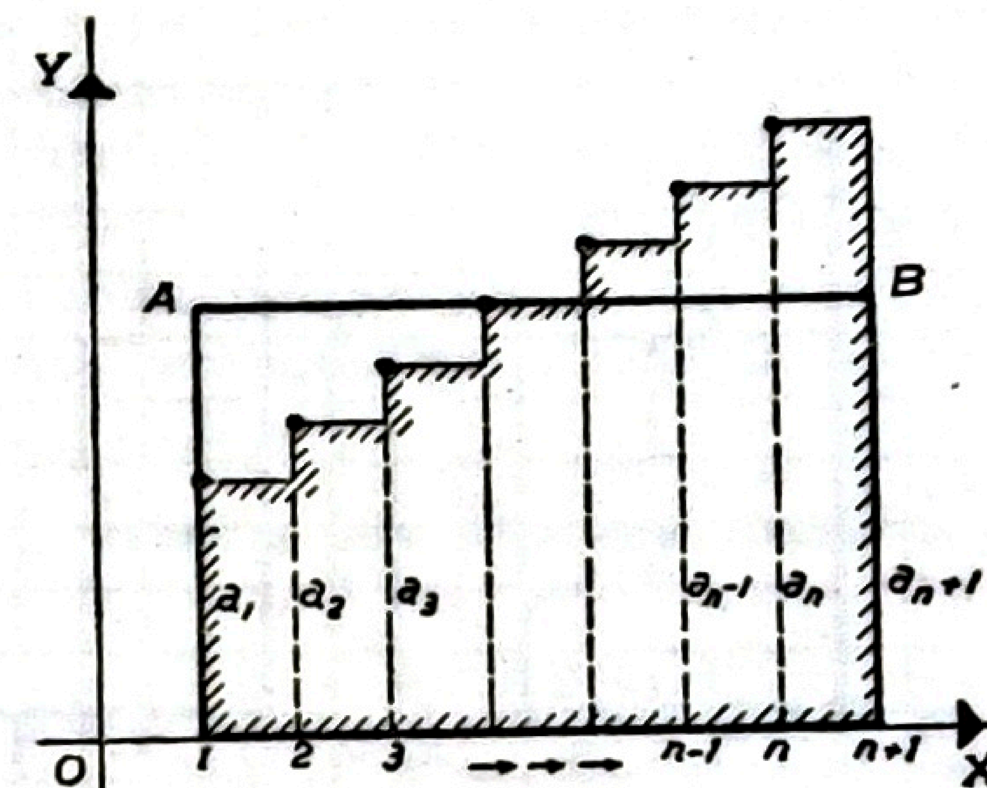


185. *Interpolar gráficamente 4 medios diferenciales entre los números* —4 *y* 2. R: Se representan en un sistema de ejes cartesianos ortogonales los puntos A (1 ; — 4) y B (6 ; 2) y se hallan las ordenadas de los puntos de la recta AB que dividen al segmento $\overline{1-6}$ del eje OX comprendido entre los puntos de abscisas 1 y 6 en tres partes iguales. Así se obtienen los medios diferenciales — 2,5 ; — 1 ; 0,5. Los segmentos punteados indican como se utilizó el papel cuadriculado para dividir al segmento $\overline{1-6}$ en 3 partes iguales. (*Matemáticas* III, pág. 271).

186. *Interpretación geométrica de la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética.* Si representamos gráficamente los n primeros términos de una progresión aritmética de razón d

$$a_1 ; \; a_2 ; \; a_3 ; \; ... \; a_h ; \; ... \; a_{n-1} ; \; a_n$$

en un sistema de ejes coordenados cartesianos ortogonales obtenemos, según vimos en 182, puntos pertenecientes a una misma recta. Si por cada uno de esos puntos trazamos la paralela al eje de las abscisas hasta cortar a la paralela al eje de ordenadas que pasa por el punto inmediato siguiente, obtenemos el gráfico escalonado de la figura adjunta.



La superficie de la figura rayada así obtenida, es igual a la suma de las superficies de los rectángulos que tienen por base al segmento unidad y por altura a los segmentos de medida a_1, a_2 a_3, ... a_{n-1}, a_n.

Llamando S a esa superficie total se tiene

$$S = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 + \; ... \; + a_{n-1} \cdot 1 + a_n \cdot 1$$

o bien $$S = a_1 + a_2 + a_3 + \; ... \; a_{n-1} + a_n$$

Dicha superficie S es igual a la del rectángulo $1ABn + 1$ cuya base es el segmento $\overline{1 - n + 1}$ que representa al número n de términos considerados y cuya altura A1 es el segmento semisuma de los segmentos que representan a los términos extremos a_1 y a_n puesto que la parte que es necesario quitar al diagrama escalonado es igual a la de la parte que se le debe agregar para obtener el rectángulo $1ABn + 1$. Cómo la superficie de este rectángulo es

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot n \quad \text{resulta} \quad S = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot n$$

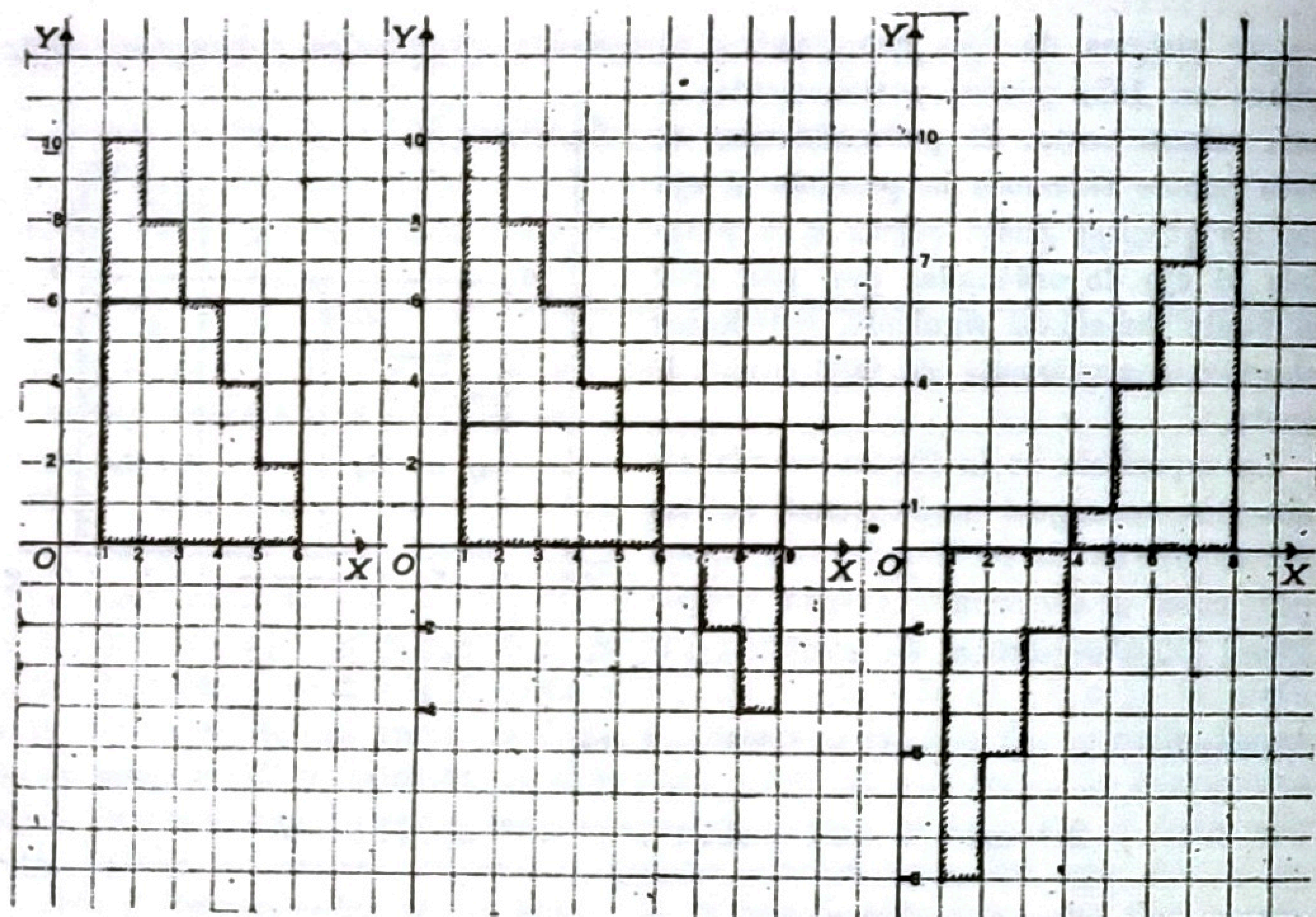
o sea la fórmula fundamental obtenida con recursos aritméticos. (*Aritmética y Algebra*, IV curso, pág. 83).

187. *Interpretar geométricamente la suma de los términos de las progresiones:* *a)* ÷ 10, 8, 6, 4, 2, 0 ;

b) ÷ 10, 8, 6, 4, 2, 0, −2, −4 ;

c) ÷ −8, −5, −2, 1, 4, 7, 10

y construir los rectángulos equivalentes.



PROGRESIONES GEOMETRICAS

Las progresiones aritméticas y geométricas figuran entre los conocimientos más antiguos de carácter *no utilitario* que se conocen, vale decir, son las primeras proposiciones de *Aritmética recreativa.* Problemas sobre progresiones se encuentran en tabletas babilónicas del año 2000 a. J. C., en el Papirus Rind en el que el escriba egipcio Ahmes recogió todos los conocimientos matemáticos de la época (año 3000 a. J. C.) y Euclides (300 a. J. C.), da una fórmula para calcular la suma de los términos de una progresión aritmética.

El sorprendente crecimiento que se obtiene al duplicar sucesivamente un número, condujo a los árabes al difundido problema del premio al inventor del juego de ajedrez y los chinos del comienzo de la era cristiana resuelven también problemas de carácter recreativo sobre progresiones y sólo más tarde lo hicieron, en ese sentido, los hindúes que estudiaron antes importantes propiedades de las progresiones.

Indicar si los siguientes conjuntos de números son términos consecutivos de progresiones geométricas:

1. 1 ; 3 ; 9 ; 27 — R: si porque $\frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = 3$

2. $1 ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{9} ; \frac{1}{27}$ — R: si porque $\frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

3. 1 ; −1 ; 1 ; −1 — R: si porque $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} = -1$

4. 2 ; 4 ; 8 ; 6 — R: no porque $\frac{4}{2} = \frac{8}{4} \neq \frac{6}{8}$

5. $x ; -x^2 ; x^3 ; -x^5$ — R: no porque $\frac{-x^2}{x} = \frac{x^3}{-x^2} \neq \frac{-x^5}{x^3}$

Escribir la expresión del enésimo término de las progresiones geométricas en las cuales a_1 y q tienen los siguientes valores:

6. 1 y $\frac{1}{2}$ — R: 2^{1-n}

7. 2 y $\frac{2}{3}$ — R: $2^n \cdot 3^{1-n}$

8. 1 y 0,1 — R: 10^{1-n}

9. $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$ — R: $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

10. n y $\frac{1}{n}$ — R: n^{2-n}

Dados tres de los números n, a_1, a_n *y* q *calcular el cuarto, o sea, llenar las casillas en blanco de cada uno de los renglones del siguiente cuadro.* R *significa respuesta*

Ejerc. No. (1)	n (2)	a_1 (3)	a_n (4)	q (5)	S (6)	R (7)	Ejerc. No. (8)	n (9)	a_1 (10)	a_n (11)	q (12)	S (13)	R (14)
11	5	2	....	2	62	32	56	7	....	1	−0,5	43	64
12	5	2	....	3	242	162	57	5	2	162	.....	242 y 122	± 3
13	12	2	....	2	8 192	4 096	58	10	....	$-\frac{64}{3}$	− 2	− 1,42083...	$\frac{1}{24}$
14	8	3	....	5	292 968	234 375	59	9	....	x^8	$-x$	$\frac{x^9+1}{x+1}$	1
15	15	5	....	1	(*) 75	5	60	10	....	$18\sqrt{2}$	$\sqrt[3]{3}$		$\frac{2\sqrt{2}}{3}$
16	10	10	....	− 2	− 3 410	−5120	61	7	....	$\frac{1}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{71}{40}+\frac{7}{8}i$	1
17	7	10	....	− 2	430	640	62	16	....	$-\frac{1}{128}$	$-\frac{1}{2}$	170,663...	256
18	6	7	....	− 2	− 147	− 224	63	8	3	384	.....	765	2
19	9	10	....	− 3	49 210	65 610	64	6	5	160	.....	315	2
20	39	15	....	− 1	15	15	65	6	− 15	3 645	.....	− 2 730	− 3
21	9	1024	....	0,5	2 044	4	66	8	− 3	384	.....	255	− 2
22	10	128	....	$\frac{1}{2}$	255,75	$\frac{1}{4}$	67	6	1	243	.....	364	3
23	6	1000	....	0,1	1 111,11	0,01	68	9	5	1 280	.....	2 555 y 855	± 2
24	10	64	....	$\frac{1}{2}$	127,875	$\frac{1}{8}$	69	11	3	177 147	.....	265 719 132 861	± 3
25	13	0,03125	....	2	255,96875	128	70	8	1 280	10	.....	2550	0,5
26	11	$\frac{1}{3125}$	....	5	3 906,24994	3 125	71	5	− 1	81	.....	− 73 − 24 i 72,8 + 73,2 i	± 3i
27	7	99	....	$-\frac{1}{3}$	74,283	$\frac{11}{81}$	72	5	− 1	− 81	.....	− 121 y 61	± 3
28	10	1024	....	$-\frac{1}{4}$	$819\ \frac{51}{256}$	$-\frac{1}{256}$	73	5	1	− 81	.....	−72,8+24,6i −72,8−24,6i	± 3i
29	6	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	....	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{7(1+\sqrt{2})}{8}$	$\frac{1}{8}$	74	8	729	1	.....	1 093 y 547	$\pm\frac{1}{3}$
30	12	3^{13}	....	$-\frac{1}{3}$	1 195 740	− 9	75	5	1 000 000	0,01	.....	1 010 101,01 990 099,01	± 0,01
31	6	27	....	i	− 27 − 27 i	27 i	76	5	0,01	1 000 000	.....	1 010 101,01 990 099,01	± 100
32	11	3	....	i	− 3 i	− 3	77	9	$\frac{3}{125}$	9 375	.....	1 464 843 976 563	± 5
33	15	50	....	i	− 50 i	− 50	78	10	$\frac{1}{24}$	$-\frac{64}{3}$	.....	− 14,2083 ...	− 2
34	10	35	....	$-i$	35 − 35 i	−35 i	79	10	1 024	$-\frac{1}{256}$	.....	157,24	$-\frac{1}{4}$
35	9	4	....	$-i$	4	4	80	7	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{8\sqrt{2}}{3}$	.....	$(15\sqrt{2}+7):3$ $(15\sqrt{2}-14):3$	$\pm\sqrt{2}$
36	8	512 i	....	0,5 i	−204+408 i	4	81	.....	5	1 280	2	2 555	9
37	5	....	48	2	93	3	82	.....	1	81	3	121	5
38	5	....	100 000	10	111 110	10	83	.....	2	512	2	1 022	9
39	7	....	640	2	1 270	10	84	.....	5	640	2	1 275	8
40	11	....	1024	2	2 047	1	85	.....	1	6 561	3	9 841	9
41	10	....	1536	2	3 069	3	86	.....	2	486	3	728	6
42	8	....	2187	3	3 280	1	87	.....	5	81 920	4	109 225	8
43	8	....	384	2	765	3	88	.....	128	1	0,5	255	8
44	9	....	9375	5	11 718,744	$\frac{3}{125}$	89	.....	1	27	$\sqrt{3}$	$40+13\sqrt{\ }$	7
45	5	....	8192	2	15 872	512	90	.....	10 000	10	0,1	11 110	4
46	8	....	256	− 2	170	− 2	91	.....	100	0,0001	0,01	101,0101	4
47	9	....	512	− 2	342	2	92	.....	0,2	2 000	10	2 222,2	5
48	11	....	177 147	− 3	132 861	3	93	.....	1	$\frac{1}{2187}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3280}{2187}$	8
49	6	....	10 000	10	11 111,1	0,1	94	.....	1	0,015625	0,5	254	7
50	6	....	10 000	100	10 101,10101	10^{-6}	95	.....	0,0000001	10	100	10,1010101	5
51	5	....	100 000	100	101 010,101	0,001	96	.....	64	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	127,875	10
52	7	....	1	$\frac{1}{3}$	1 093	729	97	.....	$\frac{1}{1024}$	32	2	$\frac{65535}{1024}$	16
53	9	....	$\frac{1}{2187}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4\,921}{2\,916}$	3	98	.....	$\frac{27}{32}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{211}{96}$	5
54	9	....	8	$\frac{1}{2}$	4 088	2 048	99	.....	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$7(1+\sqrt{2}):8$	6
55	8	....	$-\frac{1}{1024}$	$-\frac{1}{4}$	12,7998	16	100	.....	x	x^9	x	$\frac{x^{10}-x}{x-1}$	9

Hallar la suma S de n términos consecutivos de una progresión geométrica sabiendo que:

101. $n = 7$; $a_1 = 8$; $q = \frac{1}{2}$ R: $S = 15\frac{7}{8}$

102. $n = 6$; $a_1 = 2$; $q = 3$ R: $S = 728$

103. $n = 10$; $a_1 = 3$; $q = 2$ R: $S = 3069$

104. $n = 9$; $a_1 = 5$; $q = 2$ R: $S = 2555$

105. $n = 5$; $a_1 = 2$; $q = 3$ R: $S = 242$

106. $n = 7$; $a_1 = 4$; $q = 2$ R: $S = 508$

107. $n = 5$; $a_1 = \frac{27}{32}$; $q = \frac{2}{3}$ R: $S = 2\frac{19}{96}$

108. $n = 7$; $a_1 = 64$; $q = \frac{1}{2}$ R: $S = 127$

109. $n = 5$; $a_1 = \sqrt{2}$; $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ R: $S = \frac{7\sqrt{2}+6}{4}$

110. $n = 7$; $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $q = \sqrt{2}$ R: $S = \frac{15\sqrt{2}+14}{3}$

111. *Expresar la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica en función del primer término, del enésimo, de la razón y de n.*

Solución:

Siendo $S = a_1\frac{q^n-1}{q-1} = \frac{a_1q^n-a_1}{q-1}$; $a_1q^n = a_1q^{n-1}.q$ y $a_1q^{n-1} = a_n$

es $S = \frac{a_nq-a_1}{q-1}$

112. *Calcular las sumas de los términos de las progresiones geométricas con los datos de los ejercicios 11 a 100 del cuadro anterior, vale decir, verificar si son correctos los valores indicados en las columnas que llevan los números 6 y 13 del mencionado cuadro.*

Hallar el primer término a_1 y el enésimo a_n de una progresión geométrica sabiendo que:

113. $n = 6$; $q = \frac{1}{2}$; $S = 630$ R: $a_1 = 320$ $a_n = 10$

114. $n = 12$; $q = 2$; $S = 8190$ R: $a_1 = 2$ $a_n = 4096$

115. $n = 6$; $q = -2$; $S = -147$ R: $a_1 =$ $a_n = -224$

116. $n = 7$; $q = \frac{1}{2}$; $S = 15\frac{7}{8}$ R: $a_1 = 8$ $a_n = \frac{1}{8}$

117. $n = 5$; $q = \frac{2}{3}$; $S = 2\frac{19}{96}$ R: $a_1 = \frac{27}{32}$ $a_n = \frac{1}{6}$

Solución del ejercicio 113.

Siendo $a_n = a_1q^{n-1}$ y $S = a_1\frac{q^n-1}{q-1}$

reemplazando los datos por sus valores, a_1 por x y a_n por y da

$$\begin{cases} y = x.\left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ 630 = x.\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6-1}{\frac{1}{2}-1} \end{cases} \quad \text{o sea} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{32}x \\ 630 = x.\frac{\frac{1}{64}-1}{-\frac{1}{2}} = x\frac{-\frac{63}{64}}{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

De la segunda ecuación despejamos x y resulta

$$x = \frac{630.\frac{1}{2}}{\frac{63}{64}} = \frac{630.64}{63.2} = 320$$

y reemplazando este valor de x en la primera ecuación resulta

$$y = \frac{1}{32}.320 = 10 \quad \text{luego} \quad a_1 = x = 320 \quad \text{y} \quad a_n = y = 10$$

118. *Resolver los ejercicios análogos a los anteriores tomando del cuadro los datos que figuran en las columnas que llevan los números: a) 2, 5 y 6; b) 9, 13 y 14.*

Hallar el primer término a y la suma S de todos los términos de una progresión geométrica sabiendo que:

119. $n = 7$; $a_n = 3645$; $q = 3$ R: $a_1 = 5$ $S = 5465$

120. $n = 7$; $a_n = 256$; $q = 2$ R: $a_1 = 4$ $S = 508$

121. $n = 10$: $a_n = 8$; $q = 2$ R: $a_1 = \frac{1}{64}$ $S = 15\frac{63}{64}$

122. $n = 5$; $a_n = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ R: $a_1 = \sqrt{2}$ $S = \frac{7\sqrt{2}+6}{4}$

123. $n = 7$; $a_n = \frac{8\sqrt{2}}{3}$; $q = \sqrt{2}$ R: $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$ $S = \frac{15\sqrt{2}+14}{3}$

SOLUCIÓN DEL EJERCICIO 120. De las fórmulas fundamentales resulta el sistema:

$$\begin{cases} 256 = x \cdot 2^6 \\ y = x \dfrac{2^7-1}{2-1} \end{cases} \quad \text{o sea} \quad \begin{cases} 256 = x \cdot 64 \\ y = 127\,x \end{cases}$$

De la primera ecuación podemos despejar x y da

$$x = \frac{256}{64} = 4 \qquad \text{de donde} \qquad y = 127 \cdot 4 = 508$$

luego $a_1 = x = 4$ y $S = y = 508$

124. *Resolver los ejercicios análogos a los anteriores tomando del cuadro los datos que figuran en las columnas que llevan los números: a) 2, 4, y 5; b) 9, 11 y 12.*

Hallar el último término a_n y la suma S de todos los términos de una progresión geométrica sabiendo que:

125. $n = 5$; $a_1 = 2$; $q = 3$ R: $a_n = 162$ $S = 242$

126. $n = 7$; $a_1 = 8$; $q = 4$ R: $a_n = 32768$ $S = 43688$

127. $n = 6$; $a_1 = \frac{2}{5}$; $q = \frac{5}{2}$ R: $a_n = 39\frac{1}{16}$ $S = 64\frac{67}{80}$

128. $n = 8$; $a_1 = 243$; $q = \frac{2}{3}$ R: $a_n = 14\frac{2}{9}$ $S = 700\frac{5}{9}$

129. $n = 9$; $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $q = \sqrt{3}$ R: $a_n = 27\sqrt{3}$ $S = \frac{121\sqrt{3}+120}{3}$

SOLUCIÓN DEL EJERCICIO 128. De las fórmulas fundamentales resulta.

$$\begin{cases} x = 243\left(\dfrac{2}{3}\right)^7 \\ y = 243\,\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^8-1}{\dfrac{2}{3}-1} \end{cases}$$

o sea $x = 243\,\frac{2^7}{3^7} = 3^5\,\frac{2^7}{3^7} = \frac{128}{9} = 14\frac{2}{9}$

es decir
$$y = 243\,\frac{\dfrac{2^8}{3^8}-1}{\dfrac{2}{3}-1} = 3^6 \cdot \frac{\dfrac{2^8}{3^8}-1}{-1} = -\frac{2^8}{3^2} + 3^6$$

$$= \frac{3^8-2^8}{3^2} = \frac{6561-256}{9} = \frac{6305}{9} = 700\frac{5}{9}$$

luego $a_n = x = 14\frac{2}{9}$ y $S = y = 700\frac{5}{9}$

130. *Resolver ejercicios análogos a los anteriores tomando del cuadro los datos que figuran en las columnas que llevan los números: a) 2, 3 y 5; b) 9, 10 y 13.*

Hallar la razón q y la suma S de todos los términos de una progresión geométrica sabiendo que:

131. $n = 9$; $a_1 = 5$; $a_n = 1280$ R: $q = 2$ $S = 2555$

132. $n = 5$; $a_1 = -1$; $a_n = -81$ R: $q = 3$ $S = -121$

133 $n = 10$; $a_1 = \frac{1}{24}$; $a_n = -21\frac{1}{3}$ R: $q = -2$ $S = -14\frac{5}{24}$

134 $n = 5$; $a_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $a_n = 6\sqrt{3}$ R: $q = \sqrt{3}$ $S = \frac{26\sqrt{3}+24}{3}$

135. $n = 6$; $a_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $a_n = 62\frac{1}{2}$ R: $q = \sqrt{5}$ $S = \frac{155+31\sqrt{5}}{2}$

SOLUCIÓN DEL EJERCICIO 133. De las fórmulas fundamentales resulta:

$$\begin{cases} -21\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{24}\,x^9 \\ y = -\dfrac{1}{24}\,\dfrac{x^{10}-1}{x-1} \end{cases}$$

despejando x da $x^9 = -21\frac{1}{3} \cdot 24 = -\frac{64}{3} \cdot 24$

simplificando $x^9 = -64 \cdot 8 = -2^6 \cdot 2^3 = -2^9$

luego
$$x = \sqrt[9]{-2^9} = -2$$

Reemplazando en la segunda ecuación, resulta

$$y = \frac{1}{24}\,\frac{(-2)^{10}-1}{-2-1} = \frac{1}{24}\,\frac{1024-1}{-3} = \frac{1}{24} \cdot \frac{1023}{-3}$$

$$y = -\frac{1}{24} \cdot 341 = -\frac{341}{24} = -14\frac{5}{24}$$

es decir $q = x = -2$ y $S = y = -14\frac{5}{24}$

136. *Resolver los ejercicios análogos a los del párrafo anterior tomando del cuadro los datos que figuran en las columnas que llevan los números: a) 2, 3 y 4; b) 9, 10 y 11.*

INTERPOLACIÓN DE MEDIOS PROPORCIONALES. — Interpola-

137. 4 medios entre 1 y 243 — R: 3, 9, 27, 81

138. 3 medios entre −3 y −768 — R: −12, −48, −192

139. 2 medios entre 19 y 152 — R: 38 y 76

140. 1 medio entre m y n — R: $\sqrt{mn}$ o $-\sqrt{mn}$

141. 2 medios entre m y n — R: $\sqrt[3]{m^2n}$ y $\sqrt[3]{mn^2}$

142. 3 medios entre $\frac{4}{9}$ y $\frac{9}{4}$ — R: $\frac{2}{3}$, 1 y $\frac{3}{2}$ o $-\frac{2}{3}$, 1 y $-\frac{3}{2}$

143. 6 medios entre 14 y $-\frac{7}{64}$ — R: $-7, \frac{7}{2}, -\frac{7}{4}, \frac{7}{8}, -\frac{7}{16}, \frac{7}{32}$

144. 2 medios entre 1 y 0,001 — R: 0,1 y 0,01

145. 8 medios entre 0,001 y 1 000 000 — R: $10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4$ y 10^5

146. 9 entre 1 y −1 — R: $i; -1; -i; 1; i; -1; -i; 1; i$
o $-i; 1; i; 1; -i; 1; i; 1; -i$

147. *Hallar la media proporcional entre:*

a) 9 y 4 — R: ±6 b) 5 y $\frac{5}{9}$ — R: $\pm\frac{5}{3}$

c) 25 y 4 — R: ±10 d) $-x$ y $-\frac{1}{x}$ — R: ±1

e) $2+\sqrt{3}$ y $2-\sqrt{3}$ — R: ±1 f) 0,005 y 8 — R: ±0,2

g) 0,75 y $5\frac{1}{3}$ — R: ±2 h) 10 y 0,001 — R: ±0,1

i) 1 y −1 — R: $\pm i$ j) −4 y 0,25 — R: $\pm i$

148. *El segundo y el tercer término de una progresión geométrica son m y n, respectivamente. ¿Cuál es el primero?* R: m^2/n

149. *Se sabe que bajo ciertas condiciones el número de bacterias que contiene la leche se duplica cada tres horas. Calcular el número por el cual es necesario multiplicar el mencionado en primer término, para obtener el número de bacterias al cabo de un día.* R: 256

150. *Un mendigo pide hospitalidad a un avaro, quien no quiere acordársela gratuitamente. El mendigo le hace entonces la siguiente proposición: yo pagaré 1 $ por el primer día, 2 $ por el segundo, 3 $ por el tercero y así siguiendo; en cambio usted me dará 1/1000 de centavo el primer día, 2/1000 de centavo el segundo día, 4/1000 el tercero, y así siguiendo. El avaro consideró esa proposición como un negocio consintió en ese arreglo por 30 días. Liquidar la cuenta al fin de ese tiempo.*
R: *El avaro* debe 10737,42 $
» *mendigo* » 465 $

151. *Una persona le propone a otra entregarle 1 $ el primero de Enero, 2 $ el 2 de Enero, 3 $ el 3 de Enero, y así sucesivamente hasta fin de mes, a condición de que la otra le devuelva 0,001 de centavo el 1° de Febrero, 0,002 de centavo el 2 de Febrero, 0,004 el 3 de Febrero y así sucesivamente hasta el 28 de este mes. ¿Cuánto entrega la primer persona y cuánto recibe?* R: Entrega 496 $ y recibe 2684,35 $

152. *De acuerdo con una leyenda muy antigua, el inventor del ajedrez pidió a un príncipe, como precio de su invento, tantos granos de trigo como los que se obtienen colocando un grano en el primer cuadrado del tablero, dos en el segundo, cuatro en el tercero, y así sucesivamente duplicando, para cada cuadrado, el número de granos colocado en el anterior. ¿Cuántos granos recibió si el tablero de ajedrez tiene 64 cuadrados?* R: $2^{64}-1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$

153. *Tres socios de un club presentan a éste tres nuevos socios cada uno. Al día siguiente cada uno de éstos presenta otros tres, cada uno de estos otros presenta al día siguiente otros tres, y así sucesivamente. ¿Cuántos socios nuevos se presentan a ese club al cabo de una semana (excluído el Domingo)?* R: 3276 socios

154. *Un político invita a una asamblea a diez presidentes de comités. Al día siguiente cada uno de éstos invita a otros diez afiliados; al día siguiente cada uno de éstos otros invita a otros diez, y así sucesivamente. ¿Cuántas personas se han invitado a esa asamblea, si la primera invitación hizo el lunes y la última el domingo de la misma semana?* R: 11 111 110 personas

155. *Una pelota de goma rebota, cada vez que choca contra el suelo, hasta alcanzar una altura igual a 3/4 de la de caída. Si se deja caer una pelota desde 20 m de altura, ¿qué camino ha recorrido cuando choca por quinta vez contra el suelo?* R: 102,3 m

156. *Un señor compra un automóvil por 320000 $ el día que se expone por primera vez ese modelo. Si supone que la depreciación anual de su coche es de un 20 % del valor del mismo, ¿qué valor tiene para él su coche al cabo de 3 años a contar desde el día de la fecha de esa exposición?* R: 163840 $

157. *¿Qué suma logra formar una persona al cabo de 6 años, si al comenzar el primer año guarda 1000 $, al comenzar el segundo año guarda esos 1000 $ más el 10 % de esa suma, al finalizar ese año guarda lo reunido más el 10 % de lo reunido y así sucesivamente hasta finalizar el quinto año?* R: 1610,51 $

158. *Si se apilan servilletas de papel de 0,03 mm de espesor cada una, de la siguiente manera: primero se coloca una servilleta, sobre ella otras 2, sobre éstas otras 4 y así se sigue duplicando sucesivamente el número de las que se van colocando hasta hacerlo 30 veces ¿qué altura tendría la pila de servilletas?* R.: 32 km 212 m 254,69 mm

159. *Periódicamente se pone de moda la "cadena de la fortuna" que consiste en que una persona envía sendas cartas a otras 2 pidiéndoles que copien esa carta y se las envíen a otras 2 personas, cada una de las cuales debe sacar copias de la carta y enviárselas a otras 2 y así sucesivamente. Bastaría que esa cadena llegara a tener 31 eslabones solamente para que cada uno de los dos mil millones de habitantes que se estima que pueblan la Tierra recibiera una carta y tan sólo una, ¿por qué?*

R.: Porque $a_n = 2.2^{30} = 2^{31} = 2\,147\,483\,648$

160. *En un papiro egipcio de hace más de 4000 años se lee: Hay siete casas, en cada casa siete gatos, por cada gato, siete ratones, por cada ratón siete espigas, cada espiga podría haber producido siete hekat (*) de trigo. ¿Cuánto trigo se tendría en total?* R.: $7^5 = 16807$

161. *Una persona que sabe un secreto lo cuenta a otras 9 personas; cada una de estas 10 personas lo cuentan a otras 10; cada una de las cuales lo cuentan a otras 10 y cada una de ellas a otras 10. ¿Cuántas personas conocen el secreto?* R.: $10^5 = 100\,000$

162. *Una persona juega 10 \$, luego 20 \$, luego 40 \$ ... y así continúa duplicando sus apuestas y gana siempre una suma igual a la que apuesta, salvo en la última jugada en que pierde la suma apostada. Si jugó 10 veces consecutivas ¿terminó ganando o perdiendo y cuánto?* R.: *perdió* 10 \$

(**) *Hallar los límites de las sumas de los términos de las progresiones geométricas.*

1. $3^{-1}+3^{-2}+3^{-3}+\ldots+3^{-n}+\ldots$ R: $S = \dfrac{3^{-1}}{1-3^{-1}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{2}$
2. $0{,}045 + 0{,}015 + 0{,}005 + \ldots$ R: 0,0675
3. $3 + \sqrt{3} + 1 + \ldots$ R: $4{,}5 + 0{,}5\sqrt{3}$
4. $\dfrac{8}{5} - 1 + \dfrac{5}{8} - \ldots$ R: $\dfrac{64}{65}$
5. $4 + 0{,}8 + 0{,}16 + \ldots$ R: 5
6. $0{,}6 + 0{,}06 + 0{,}006 + \ldots$ R: $\dfrac{2}{3}$
7. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \ldots$ R: $\dfrac{1}{2}$
8. $1 - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{64} - \ldots$ R: $\dfrac{8}{9}$

(*) El **hekat** antigua unidad para la medida de granos, es aproximadamente igual a 4,789 litros.

(**) Para los alumnos de las Escuelas Nacionales de Comercio.

9. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots$ R; 1
10. $\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{9} + \dfrac{4}{27} - \ldots$ R: $\dfrac{1}{5}$
11. $2 - 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \ldots$ R: $\dfrac{4}{3}$
12. $-2 + 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} \ldots$ R: $-\dfrac{4}{3}$
13. $3 - 1 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} + \ldots$ R: $2\dfrac{1}{4}$
14. $1 - 0{,}1 + 0{,}01 - \ldots$ R: $\dfrac{10}{11}$
15. $1 + 0{,}1 + 0{,}01 + \ldots$ R: $\dfrac{10}{9}$
16. $0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + \ldots$ R: $\dfrac{7}{9}$
17. $0{,}7 - 0{,}07 + 0{,}007 - 0{,}0007 + \ldots$ R: $\dfrac{7}{11}$
18. $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \ldots$ R: $\dfrac{4}{3}$
19. $1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} - \ldots$ R: $\dfrac{4}{5}$
20. $\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^7 + \ldots$ R: $\dfrac{2}{5}$

Hallar las fracciones ordinarias generatrices de las siguientes fracciones decimales periódicas puras.

1. $0,\widehat{3}$ R: $0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \ldots = \dfrac{0{,}3}{1-0{,}1} = \dfrac{0{,}3}{0{,}9} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$
2. $0,\widehat{7}$ R: $0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + \ldots = \dfrac{0{,}7}{1-0{,}1} = \dfrac{0{,}7}{0{,}9} = \dfrac{7}{9}$
3. $0,\widehat{15}$ R: $0{,}15 + 0{,}0015 + 0{,}000015 + \ldots = \dfrac{0{,}15}{1-0{,}01} = \dfrac{0{,}15}{0{,}99} = \dfrac{15}{99} = \dfrac{5}{33}$
4. $0,\widehat{03}$ R: $0{,}03 + 0{,}0003 + 0{,}000003 + \ldots = \dfrac{0{,}03}{1-0{,}01} = \dfrac{0{,}03}{0{,}99} = \dfrac{3}{99} = \dfrac{1}{33}$

5. $0,\widehat{ab}$ R: $0,\underline{ab} + 0,00\underline{ab} + 0,0000\underline{ab} + \dots = \frac{0,\underline{ab}}{1-0,01} = \frac{0,\underline{ab}}{0,99} = \frac{\underline{ab}}{99}$

6. $0,\widehat{9}$ R: $0{,}9 + 0,09 + 0,009 + \dots \dots = \frac{0,9}{1-0,1} = \frac{0,9}{0,9} = 1$

7. $3,\widehat{2}$ R: $3 + 0,2 + 0,02 + 0,002 + \dots \dots = 3 + \frac{0,2}{1-0,1} = 3 + \frac{2}{9} = 3\frac{2}{9}$

8. $1,\widehat{1}$ R: $1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots \dots = 1 + \frac{0,1}{1-0,1} = 1 + \frac{1}{9} = 1\frac{1}{9}$

9. $\underline{m},\widehat{ab}$ R: $\underline{m} + 0,\underline{ab} + 0,00\underline{ab} + 0,0000\underline{ab} + \dots = \underline{m} + \frac{\underline{ab}}{1-0,01} = \underline{m}\,\frac{\underline{ab}}{99}$

10. $\underline{nr},\widehat{abc}$ R: $\underline{nr} + 0,\underline{abc} + 0,000\underline{abc} + \dots \dots = \underline{nr} + \frac{0,\underline{abc}}{1-0,001} = \underline{nr}\,\frac{\underline{abc}}{999}$

De esta manera se justifica la regla que empleamos en Aritmética. (*Matemáticas*, II curso, pág. 39).

Hallar las fracciones ordinarias generatrices de las fracciones decimales periódicas mixtas.

1. $0,2\widehat{5}$ R: $0,2 + 0,05 + 0,005 + 0,0005 + \dots$ R: $0,2 + \frac{0,05}{1-0,1} =$

$$= 0,2 + \frac{0,05}{0,9} = 0,2 + \frac{5}{90} = \frac{2}{10} + \frac{5}{90} = \frac{2\,.\,9 + 5}{90} =$$

$$= \frac{2\,(10-1) + 5}{90} = \frac{25-2}{90} = \frac{23}{90}$$

2. $0,23\widehat{5}$ R: $0,23 + 0,005 + 0,0005 + \dots = 0,23 + \frac{0,005}{1-0,1} =$

$$= 0,23 + \frac{0,005}{0,9} = \frac{23}{100} + \frac{5}{900} = \frac{23\,.\,9 + 5}{900} = \frac{23\,(10-1)+5}{900} =$$

$$= \frac{230 - 23 + 5}{900} = \frac{235-23}{900} = \frac{212}{900} = \frac{106}{450} = \frac{53}{225}$$

3. $0,\underline{ab}\widehat{cd}$ R: $0,\underline{ab} + 0,00\underline{cd} + 0,0000\underline{cd} + \dots = 0,\underline{ab} + \frac{0,00\underline{cd}}{1-0,01} =$

$$= 0,\underline{ab} + \frac{0,00\underline{cd}}{0,99} = \frac{\underline{ab}}{100} + \frac{\underline{cd}}{9900} = \frac{\underline{ab}\,.\,99 + \underline{cd}}{9900} =$$

$$= \frac{\underline{ab}\,(100-1) + \underline{cd}}{9900} = \frac{\underline{ab}00 + \underline{cd} - \underline{ab}}{9900} = \frac{\underline{abcd} - \underline{ab}}{9900}$$

4. $0,\underline{ab}\widehat{cd}$ R: $m\,\frac{\underline{abcd} - \underline{ab}}{9900}$

5. $\underline{mnp},\underline{x}\widehat{yz}$ R: $\underline{mnp}\,\frac{\underline{xyz} - \underline{xy}}{900}$

Queda justificada así la regla empleada en Aritmética. (*Matemáticas*, II curso, pág. 40).

Hallar la suma de los n primeros términos de las progresiones.

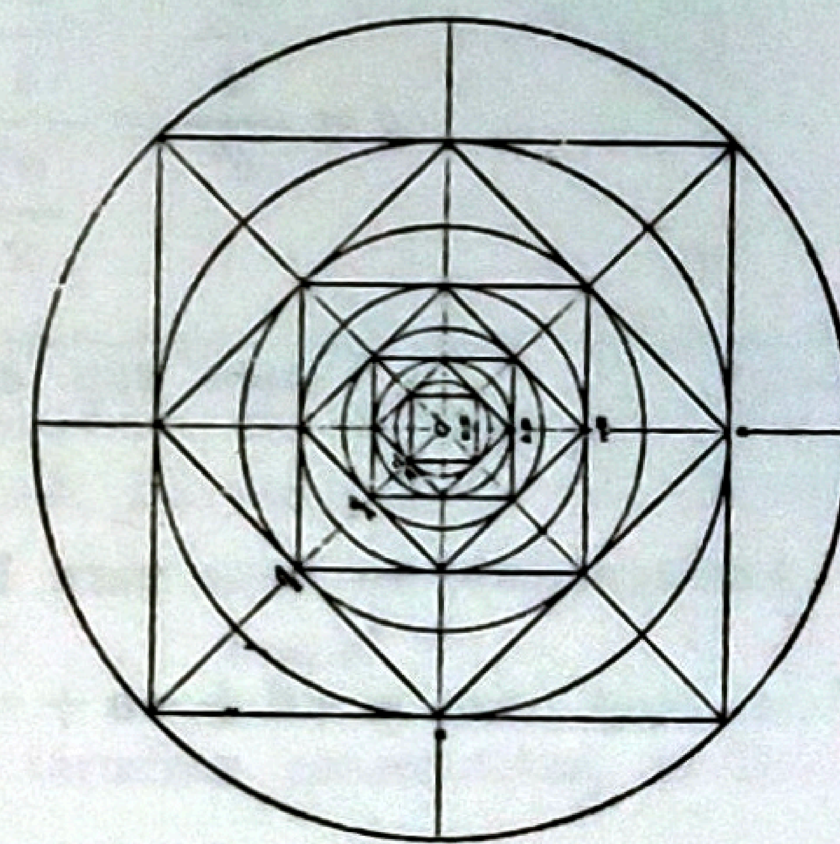
1. $1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots$ R: $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

2. $(1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots$ R: $(1+i)\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}$

3. $(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots$ R: $(1+i)^{-1}\,\frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1}$

4. $(1+i)^n + (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots$ R: $(1+i)^n\,\frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1} = \frac{1 - (1+i)^n}{(1+i)^{-1} - 1}$

Dado el cuadrado de lado a construir el cuadrado que tiene por vértices los puntos medios de sus lados, luego el que tiene por vértices los puntos medios de los lados del obtenido y así succesivamente. Trazar las circunferencias circunscriptas a cada uno de esos cuadrados y calcular en función del lado a: 1) los lados de cada uno de los cuadrados obtenidos y la suma de: 2) sus perímetros; 3) sus superficies; 4) las longitudes de las circunferencias y 5) las superficies de los círculos descriptos.



Llamando d a la diagonal del cuadrado resulta

$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2\,a^2} = a\,\sqrt{2} \quad \text{por el teor. de Pitágoras}$$

El lado del primer cuadrado obtenido es igual a $\frac{d}{2} = \frac{a\,\sqrt{2}}{2}$ porque el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad. Por la misma razón el lado del segundo cuadrado es igual a $\frac{a}{2}$ el del tercero a $\frac{a\,\sqrt{2}}{4}$, el del cuarto a $\frac{a}{4}$ y así sucesivamente. Por consiguiente.

$$\textit{Sum. perím. cuads.} = 4\,a + 4\,.\,\frac{d}{2} + 4\,\frac{a}{2} + 4\,\frac{d}{4} + 4\,\frac{a}{4} + \dots$$

y reemplazando d por su igual $a\sqrt{2}$, y simplificando

$$\textit{Sum. perím. cuads.} = 4a + 2a\sqrt{2} + 2a + a\sqrt{2} + a + \dots$$

y como los sumandos forman una progresión geométrica de razón

$$q = \frac{2a\sqrt{2}}{4a} \qquad \frac{2a}{2a\sqrt{2}} = \dots = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1, \qquad \text{resulta}$$

$$\textit{Sum. perím cuads.} = \frac{4a}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4a\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{4a\sqrt{2}\,(\sqrt{2}+1)}{2-1} = \mathbf{(8+4\sqrt{2})\,a}$$

$$\textit{Suma sup. cuads.} = a^2 + \frac{d^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{d^2}{16} + \frac{a^2}{16} + \dots$$

y como $d^2 = 2a^2$, reemplazando y simplificando da:

$$\textit{Suma sup. cuads.} = a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{16} + \dots$$

Los sumandos forman una progresión geométrica de razón

$$q = \frac{\frac{a^2}{2}}{a^2} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a^2}{2}} = \frac{\frac{a^2}{8}}{\frac{a^2}{4}} = \dots = \frac{1}{2} < 1$$

luego $\textit{Sum. sup. cuads.} = a^2 \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \mathbf{2\,a^2}$

Analógamente se tiene para las circunferencias

$$\textit{Sum. long. circ.} = \pi d + \pi a + \pi\frac{d}{2} + \pi\frac{a}{2} + \dots$$

$$= \pi a\sqrt{2} + \pi a + \frac{\pi a\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi a}{2} + \dots$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}\,a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\pi\sqrt{2}\,a}{2-\sqrt{2}} = \frac{2\pi\sqrt{2}\,(2+\sqrt{2})\,a}{2}$$

$$\textit{Sum. sup. cuads.} = \mathbf{\pi\,(2\sqrt{2}+2)\,a}$$

$$\textit{Sum. sup. circ.} = \pi\frac{d^2}{4} + \pi\frac{a^2}{4} + \pi\frac{d^2}{16} + \pi\frac{a^2}{16} + \dots$$

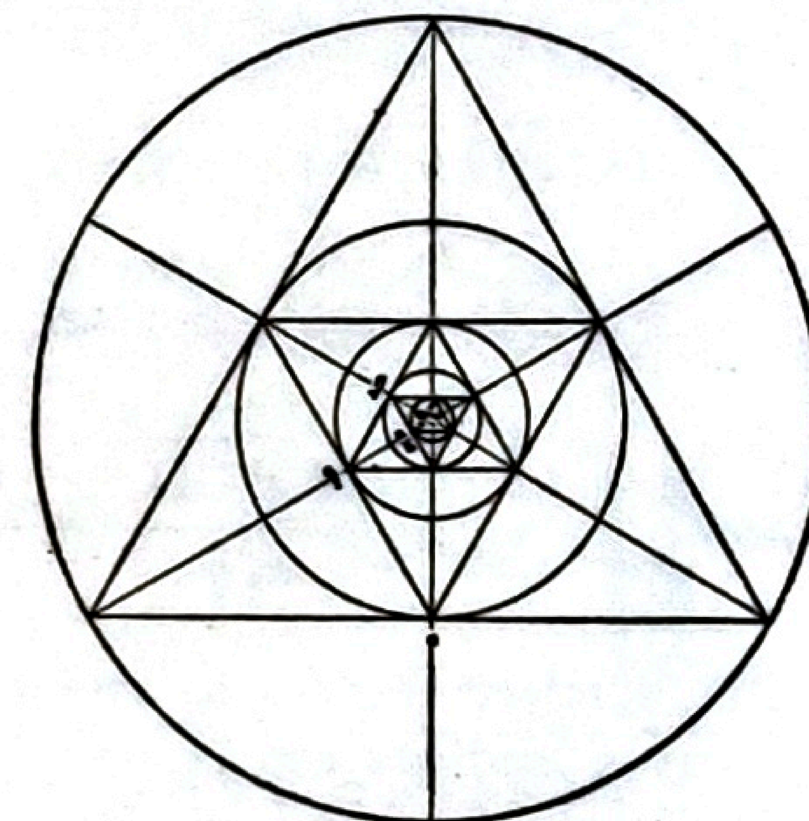
$$= \pi\frac{2a^2}{4} + \pi\frac{a^2}{4} + \pi\frac{2a^2}{16} + \pi\frac{a^2}{16} + \dots$$

$$= \pi\frac{a^2}{2} + \pi\frac{a^2}{4} + \pi\frac{a^2}{8} + \pi\frac{a^2}{16} + \dots$$

$$= \pi\frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) = \pi\frac{a^2}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\textit{Sum. sup. circ.} = \mathbf{\pi\,a^2}$$

Dado el triángulo equilátero de lado a construir otro que tenga por vértice los puntos medios de sus lados, luego el que resulta de unir los puntos medios de los lados del triángulo obtenido y así sucesivamente. Trazar las circunferencias circunscriptas a cada uno de esos triángulos y calcular en función del lado a: 1°) los lados de cada uno de los triángulos obtenidos, y la suma de: 2°) sus perímetros; 3°) sus superficies; 4°) las longitudes de las circunferencias y 5°) las superficies de los círculos descriptos.



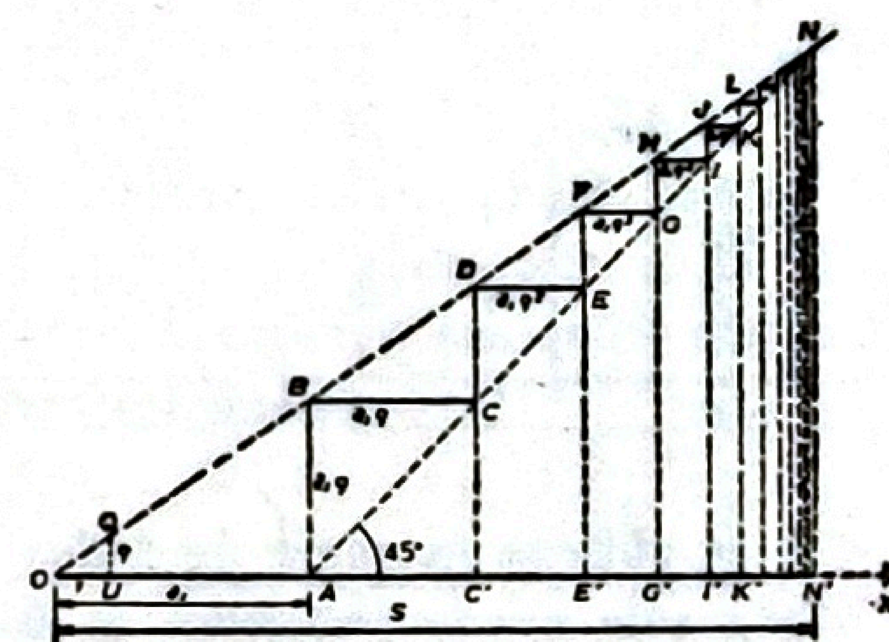
R: 1°) $\frac{a}{2}$; $\frac{a}{4}$; $\frac{a}{8}$; ... ; $\frac{a}{2^n}$; 2°) $6a$; 3°) $\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$

4°) $\frac{8}{3}\pi\sqrt{3}\,a$; 5°) $\frac{4}{9}\pi a^2$

Cálculo gráfico de la suma de los términos de una progresión geométrica.—Consideremos **la** progresión geométrica de términos positivos el primero de los cuales sea a_1 y su razón $q > 0$. La suma S de sus términos la indicamos así:

$$S = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + \dots + a_1 q^n + \dots$$

Para obtener gráficamente la suma de n términos consecutivos, se llevan sobre una semirrecta $\overrightarrow{OX}$, a partir de su origen O el segmento $\overline{OU}$ que se toma como unidad y el $\overline{OA}$ cuya medida con respecto a $\overline{OU}$ sea a_1. Sobre la perpendicular a $\overline{OX}$ en U se toma el segmento $\overline{UQ}$ cuya medida con respecto a U sea q y se trazan la semirrecta $\overline{OQ}$ y la $\overline{AN}$, esta última tal que el ángulo NAX = 45°. La paralela a $\overline{UQ}$ trazada por A corta a $\overline{ON}$ en el punto B tal que *med AB resp.* U = $a_1 \cdot q$.



En efecto: de la semejanza de los triángulos rectángulos OUQ y OAB

resulta $\frac{Med\,\overline{AB}}{med\,\overline{UQ}} = \frac{med\,\overline{OA}}{med\,\overline{OU}}$ o sea $\frac{Med\,\overline{AB}}{q} = \frac{a_1}{1}$ $\therefore$ $Med\,\overline{AB} = a_1 \cdot q$

La paralela a $\overline{OX}$ trazada por B corta a $\overrightarrow{AN}$ en C y la perpendicular a $\overline{BC}$ en C corta a la $\overrightarrow{OQ}$ en D resultando:

$Med\,\overline{BC} = a_1 q$ por ser tr. rec ABC isósc. pues es $\hat{A} = \hat{C} = 45°$

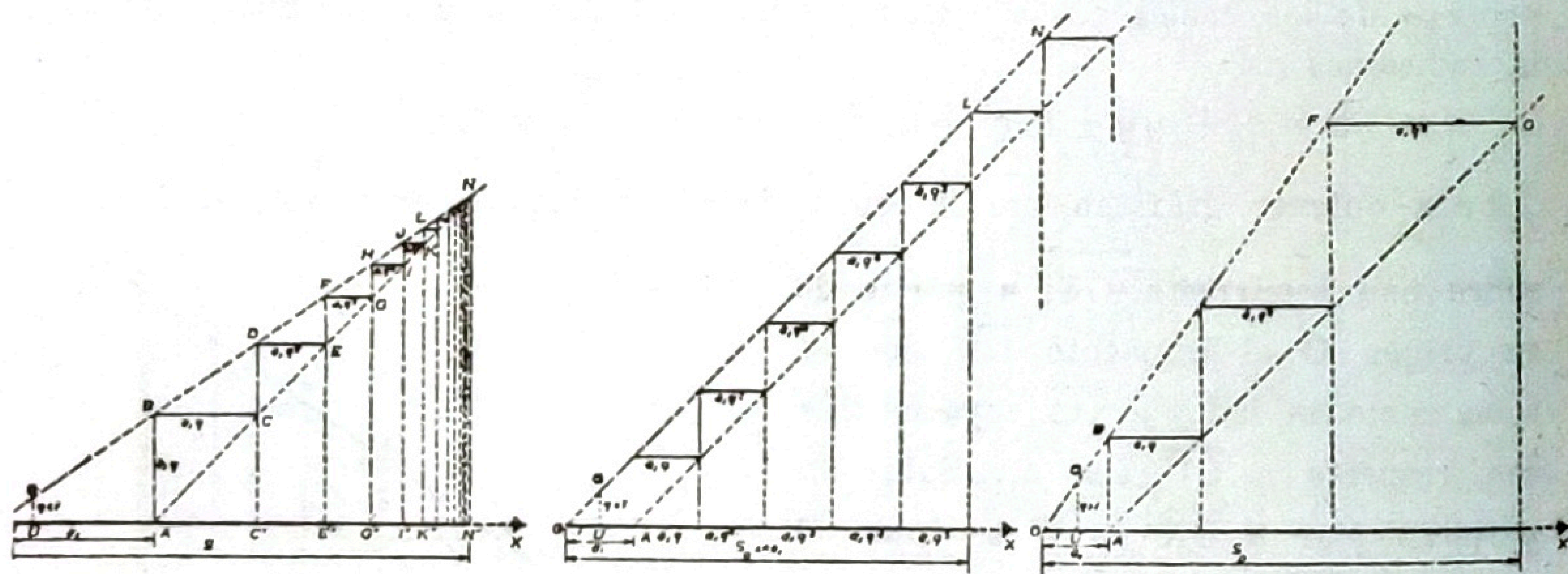
$Med\,\overline{CD} = a_1 q^2$ por ser $\overset{\triangle}{BCD} \sim \overset{\triangle}{OUQ}$ es $\frac{Med\,\overline{CD}}{Med\,\overline{BC}} = \frac{med\,\overline{QU}}{med\,\overline{OU}}$

o sea $\frac{Med\,\overline{CD}}{a_1 q} = \frac{q}{1}$ luego $med\,\overline{CD} = a_1 q^2$

En la misma forma se van obteniendo los segmentos $\overline{EF} = \overline{FG}$, $\overline{GH} = \overline{HI}$, ... cuyas medidas con respecto a U son, respectivamente, $a_1 q^3$; $a_1 q^4$; $a_1 q^5$... es decir términos consecutivos de la progresión considerada. Proyectando los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{DE}$, $\overline{FG}$, $\overline{HI}$, ... sobre $\overrightarrow{OX}$ se obtienen los segmentos consecutivos $\overline{OA}$, $\overline{AC'}$, $\overline{C'E'}$, $\overline{E'G'}$, ... cuya suma tiene por medida la suma de los términos consecutivos.

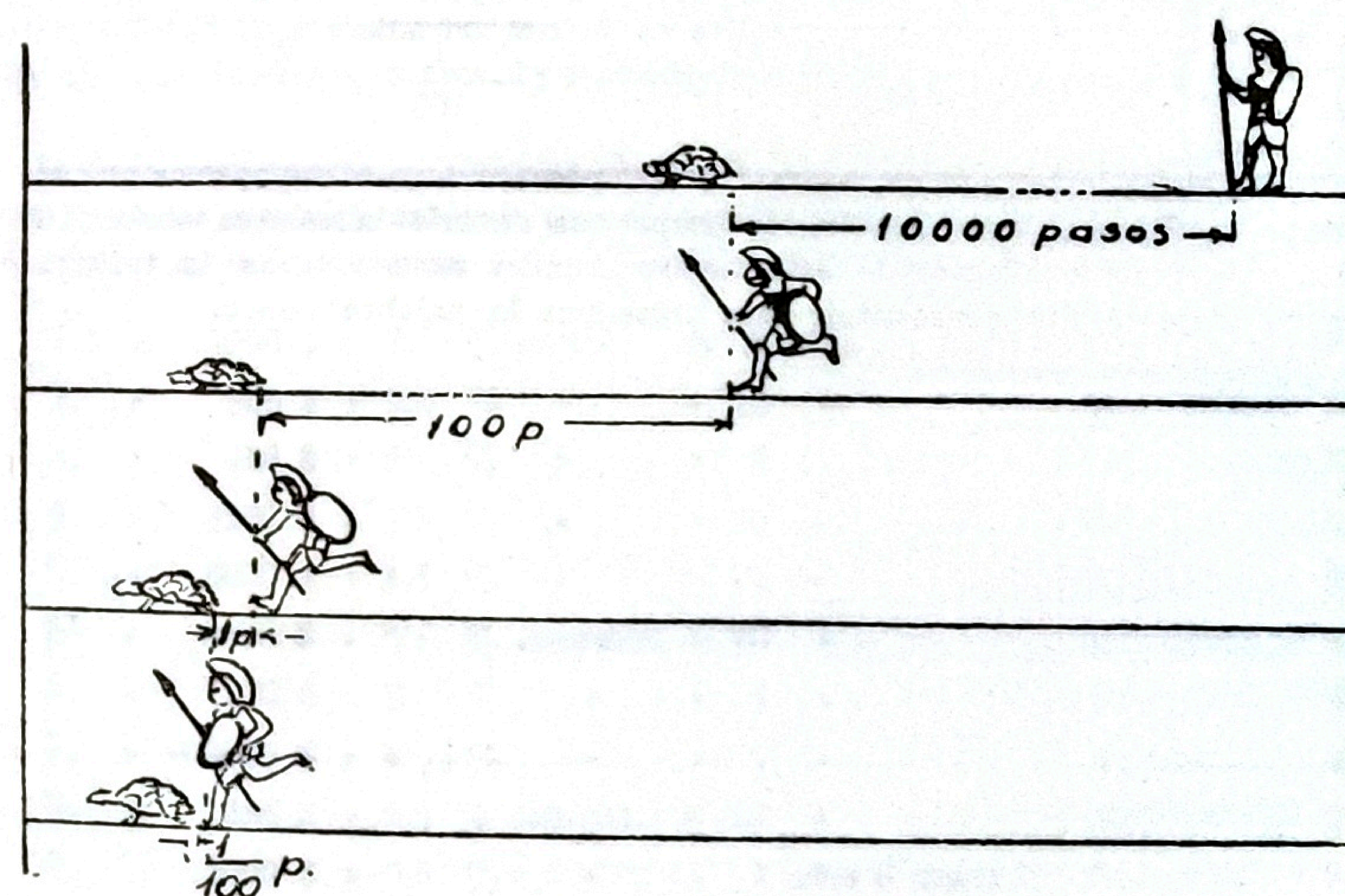
$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots$$

En la figura que sigue se aprecia fácilmente que si la razón q es tal que



$q < 1$ se obtiene la suma de *todos* los términos de la progresión; que si $q = 1$ o $q > 1$ sólo puede obtenerse la suma de un *determinado* número de términos consecutivos porque dicha suma crece indefinidamente. En el primer caso se dice que la progresión es *convergente* y en los otros dos *divergente*.

Aquiles y la tortuga. | Aquiles el de los pies ligeros famoso héroe griego, interviene, según su compatriota el filósofo Zenón, en una extraña competencia como es la carrera contra una tortuga a quien da 10 000 pasos de ventaja. Aquiles corre con una velocidad igual a 100 veces la velocidad de la tortuga. Zenón dice que no obstante lo veloz que es Aquiles y la lentitud con que se mueve su competidora, el de los pies ligeros *nunca* alcanzará a la tortuga. Llega a esa conclusión razonando así: cuando Aquiles haya hecho los 10 000 pasos de ventaja no encuentra a la tortuga que ha recorrido 100 pasos, cuando Aquiles recorra esos 100 la tortuga ha hecho 1, cuando Aquiles haga ese paso la tortuga se ha adelantado 0,01 de paso. Cuando Aquiles haga eso 0,01 la tortuga hace un 0,0001 de paso, cuando franquee ese 0,0001 de paso la tortuga se le ha adelantado 0,000001 de paso, y así sucesivamente, *por lo tanto* Aquiles no alcanzará nunca a la tortuga, puesto



que la ventaja de ésta, si bien es cada vez menor, no se anula nunca. La conclusión a que llegaba Zenón con su razonamiento sería correcta si la suma de las sucesivas ventajas de la tortuga llegaran a superar cualquier distancia por grande que esta fuera mientras que, como sabemos,

$$10\,000 + 100 + 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10\,000} + \frac{1}{1\,000\,000} + \ldots$$

es la suma de los términos de una progresión geométrica indefinida cuya razón

es $\frac{1}{100} < 1$ suma que tiene por límite

$$S = \frac{10000}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{10\,000}{\frac{99}{100}} = 10101 \frac{1}{9} \text{ pasos}$$

distancia que Aquiles puede alcanzar y aún superar en poco tiempo.

En efecto: si se toma como unidad de tiempo el que la tortuga emplea para recorrer los 10 000 pasos de ventaja, Aquiles los recorre en 1 centésimo (pues como se dijo su velocidad es igual a 100 veces la de la tortuga); en este tiempo la tortuga recorre 10 pasos que Aquiles los hace en 1 diez milésimo, y así sucesivamente, luego el tiempo total es

$$1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10\,000} + \frac{1}{100\,000} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{100}{99} = 1\frac{1}{99}$$

del que emplea la tortuga en recorrer 10 000 pasos. Luego si suponemos que ese tiempo es 990 seg. por ejemplo, el tiempo total que duraría la carrera sería 1000 seg., vale decir que *antes de este tiempo* Aquiles no alcanza a la tortuga. La paradoja resulta de sustituir esta frase por la palabra *nunca*.

CUESTIONES DE ALGEBRA FINANCIERA

La administración eficaz y prudente de los servicios públicos de transportes, telecomunicaciones, elevadores de granos, puertos, seguridad social, convenios comerciales con otros países, fijación de precios de cosechas, etc., requiere para su financiación, administración, mantenimiento y mejoramiento el empleo de la Matemática Financiera, cuyos elementos estudiaremos a continuación, y de interesantes y laboriosos cálculos para la determinación equitativa y conveniente de tarifas de pasajes, fletes, abonos de servicios telefónicos, comunicaciones a larga distancia, primas de seguros, compensaciones por diferencia de cambios, intereses, cuotas de capitalización y de amortización, etc.

Interés compuesto. — ***Calcular el monto obtenido a interés compuesto con los siguientes capitales, sabiendo que el período de capitalización coincide con el de la tasa en cada problema.***

1.	*de*	1000 $	*al*	3 %	*anual*	*en*	3 *años*	R:	1092,73 $
2.	»	800 $	»	2,5 %	»	»	10 »	R:	1024,07 $
3.	»	458 $	»	4 %	»	»	5 »	R:	557,23 $
4.	»	4260 $	»	3,5 %	»	»	20 »	R:	8476,50 $
5.	»	6000 $	»	1,5 %	»	»	70 »	R:	17012,74 $
5′.	»	6000 $	»	3/4 %	*semestral*	»	70 »	R:	17078,86 $
6.	»	1900 $	»	3 %	»	»	9 »	R:	3234,62 $
7.	»	100000 $	»	4 1/2 %	»	»	1 »	R:	109202,5 $
8.	»	685 $	»	2,5 %	*cuatrim.*	»	18 »	R:	2598,84 $
9.	»	2000 $	»	0,5 %	»	»	7 *años* 8 *meses*	R:	2243,10 $
10.	»	100 $	»	1/2 %	*trimestr.*	»	22 »	R:	155,10 $
11.	»	12000 $	»	2 %	*trimestr.*	»	15 *meses*	R:	13248,97 $
12.	»	120 $	»	0,5 %	*mensual*	»	18 »	R:	131,27 $
13.	»	9000 $	»	1 %	»	»	6 *años* 9 *meses*	R:	20149,94 $
14.	»	10824 $	»	4,75 %	*anual*	»	62 »	R:	192281,61 $
15.	»	42000 $	»	1 7/8 %	*semestral*	»	26 1/2 *años*	R:	112417,31 $
16.	»	230 $	»	0,25 %	*mensual*	»	30 *años* 5 *meses*	R:	1670,87 $
17.	»	1 $	»	0,01 %	*diario*	»	1 *año*	R:	1,036 $

Calcular el capital inicial que colocado a interés compuesto dió un monto:

18. *de* 1200 $ *al* 8 % *anual* *en* 5 *años* R: 816,70 $

19. » 438,50 $ » 3 % *semestral* » $7\frac{1}{2}$ » R: 281,46 $

20. » 12783,40 $ » $2\frac{3}{4}$ % *trimestral* » $28\frac{1}{2}$ *años* R: 560,71 $

21. » 3542 $ » $\frac{7}{8}$ % *bimestral* » 30 *meses* R: 3108,10 $

22. » 195,65 $ » $\frac{3}{4}$ % *mensual* » 10 *años* R: 79,81 $

Calcular la tasa a que estuvo colocado un capital de:

23. 10000 $ *que en 15 años dió un monto de* 15000 $ *capitalizando anualmente.* R: 2,74 %

24. 23000 $ *que en 10 años dió un monto de* 30000 $ *capitalizando semestralmente.* R: 2,692 %

25. 800 $ *que en 18 años dió un monto de* 1500 $ *capitalizando trimestralmente.* R: 3,507 %

26. 1 $ *que en 7 años dió un monto de* $ 35 *capitalizando mensualmente.* R: 51,89 %

27. 300 $ *que en 6 años dió un monto de* 500 $ *capitalizando bimestralmente.* R: 8,568 %

Calcular el número de períodos de capitalización a que estuvo sometido un capital de:

28. 3000 $ *que al* 3 % *anual* *se transformó en* $ 4550 R: 14,09 años

29. 847 $ » » $4\frac{1}{2}$ % *semestral* » » » $ 1300 R: 9,73 semestres

30. 100 $ » » 0,5 % *trimestral* » » » $ 240 R: 175,21 trimestres

31. 400 $ » » 2 % » *aumentó un* 50 % R: 20,4 trimestres

32. 558 $ » » 0,1 % *mensual se duplicó* R: 702,4 meses

Nota. — Interpretar las soluciones no enteras y calcular los montos que es obtienen con los nuevos tiempos que se adopten.

Resolver los siguientes problemas en que el período de capitalización no coincide con el de la tasa.

33. *Calcular el monto de* 2848 $ *al* 3 % *tanual en* 10 *años capitalizando trimestralmente.* R: 3840,10

34. *Calcular el monto de* 100 $ *al* 6 % *anual en* 7 *años* 5 *meses capitalizando mensualmente.* R: 155,88 $

35. *Calcular el capital que al* 5 % *anual dió en* 6 *años* 3594 $, *capitalizando semestralmente.* R: 2672,34 $

36. *Calcular el capital que al* 4 % *anual dió en* $17\frac{1}{2}$ *años* 11300 $ *capitalizando trimestralmente.* R: 5630,96 $

37. *Calcular el número de semestres necesarios para que* 1000 $ *al* 2 % *anual se transformen en* 1711,41 $. R: 54 semestres

38. *Calcular el número de años necesarios para que* 8520 $ *al* 8 % *anual se transformen en* 10000 $. R: 2,05 años

39. *Calcular la tasa anual necesaria para que* 900 $, *al cabo de* 9 *años, se transformen en* 2187 $ *al capitalizar cuatrimestralmente.* R: 10 %

40. *Calcular la tasa anual necesaria para que* 150 $, *al cabo de* 2 *años* 4 *meses, se transformen en* 196 $, *al capitalizar bimestralmente.* R: 11,65 %

Anualidades de capitalización. — *Calcular el capital obtenido mediante anualidades:*

41. *de* 50 $ *al* 3 % *anual* *al cabo de* 50 *años* R: 5639,84 $

42. » 180 $ » 6 % » » » » 20 » R: 6621,41 $

43. » 1250 $ » 4,5 % » » » » 33 » R: 90945,28 $

44. » 80 $ » 2 % *trimestral* » » » 10 » R: 4832,17 $

45. » 575 $ » 3,50 % *semestral* » » » 10 » R: 16260,82 $

Calcular la anualidad o cuota de amortización necesaria para formar un capital:

46. *de* 100000 $ *con* 20 *cuotas anuales* *al* 6 % *anual.* R: 2718,50 $

47. » 18000 $ » 40 » » » 2 % » R: 298 $

48. » 2500 $ » 12 » *semestrales* » 2,5 % *semestr.* R: 181,22 $

49. » 1640 $ » 50 » *mensuales* » 1 % *mensual.* R: 25,19 $

50. » 800 $ » 8 » *trimestrales* » 2,50 % *trimestr.* R: 91,57 $

Calcular el número de cuotas de capitalización:

51. *de* 100 $ *anuales al* 4,50 % *anual necesarias para formar* 3137,14 $.
R: 20 cuotas anuales

52. *de* 250 $ *anuales al* 6 % *anual necesarias para formar* 18409,95 $.
R: 29 cuotas anuales

53. *de* 300 $ *semestrales al* 2 % *semestral necesarias para formar* 3650 $.
R: 11 cuotas semestrales

54. *de* 1000 $ *cuatrimestrales al* 1,50 % *cuatrimestral necesarias para formar* 8000 $.
R: 7,60 cuotas cuatrimestrales

55. *de* 450 $ *trimestrales al* 1 % *trimestral necesarias para formar* 10000 $:
R: 20 cuotas trimestrale

Anualidades de amortización. — *Calcular el capital amortizado mediantes cuotas de amortización.*

56. *de*	50 $ *al* 3	% *anual*	*al cabo de* 50 *años.*	R:	1286,49 $
57. »	180 $ » 6	» »	» » » 20 »	R:	2064,59 $
58. »	1250 $ » 4,5	» »	» » » 33 »	R:	21278,58 $
59. »	80 $ » 2	» *trimestral*	» » » 40 »	R:	3831,72 $
60. »	575 $ » 3,25	» *semestral*	» » » 10 »	R:	8360,12 $

Calcular la anualidad o cuota de amortización necesaria para pagar un capital:

61 *de*	100000 $ *con* 20	*cuotas anuales*	*al* 6 % *anual.*	R:	8718, 46 $
62. »	18000 $ » 40	»	» 2 » »	R:	658 $
63. »	2500 $ » 12	» *semestrales*	» 2,5 » *semestral.*	R:	243,76 $
64. »	1640 $ » 50	» *mensuales*	» 0,5 » *mensual.*	R:	37,15 $

NUMEROS COMPLEJOS (*)

El prodigioso desarrollo de la Matemática desde hace dos siglos se debe en gran parte, según el matemático francés E. Borel, a la introducción de los números imaginarios, es decir a la hipótesis, considerada ''absurda'' de la existencia de números cuyos cuadrados sean negativos. La denominación de *números complejos* tiene sobre la de *números imaginarios* — agrega — la doble ventaja de descartar toda idea de misterio que esa palabra imaginario podría sugerir al espíritu, y señalar bien, por otra parte, que un complejo está determinado por sus dos componentes. E. T. Bell escribe: ''La palabra ''imaginario'' es la gran calamidad algebraica pero está demasiado arraigada para que pueda eliminarse. Jamás debería haber sido usada. Los algebristas de los siglos XVII y XVIII llegaron al concepto de número complejo en forma casi natural y antes de que el concepto más simple de número negativo fuera introducido. Contribuyeron eficazmente a su aceptación y difusión su representación gráfica por puntos de un plano de dos ejes cartesianos ortogonales que tienen por abscisa a la componente real y por ordenada a la componente imaginaria; el desarrollo completo de una teoría rigurosa de los mismos y sus múltiples aplicaciones teóricas y prácticas. Estas últimas hacen que su conocimiento sea indispensable para el estudio de la electrotécnica, cartografía, hidrodinámica, para la proyección de los perfiles aerodinámicos, para dar forma apropiada a las hélices de aviones... La notación que utilizamos actualmente fué evolucionando desde la época en que R. Bombelli (italiano, —; 1530), considerado como el creador del cálculo con números complejos, representaba $\sqrt[3]{2+2i}$ por ejemplo por Rc[2*pdm*2], utilizando la notación p.d.m. (que se lee: *piú di meno* o sea más que menos) para $+i$ y m.d.m. (*meno di meno* o sea menos que menos) para $-i$.

El símbolo i sugerido por L. Euler (suizo, 1707-1783), por ser la inicial de imaginario, fué divulgado por C. F. Gauss (alemán, 1777-1855) a quien se debe, entre las múltiples e importantísimas contribuciones matemáticas, la de haber vencido las últimas resistencias a la admisión de los números complejos. Se debe a Descartes la distinción entre raíces *reales* e *imaginarias* de una ecuación.

Igualdad. — *¿Para qué valores reales de x y de y se verifican las igualdades?*:

1. $2x - yi = 4y - 6 - 4i$ — R. $x = 5 ; y = 4$

2. $xi + yi = 4i + 5x$ — R: $x = 0 ; y = 4$

(*) En el Apéndice, págs. 234 a 244, se tratan: la *Representación cartesiana y polar de los números complejos* y *de las operaciones entre los mismos*, en la pág. 252 la *Aplicación de la Regla Ruffini en el campo complejo*, y en las pags. 259 a 262 la *Extracción de raíces cuadradas de números complejos.*

3. $2x + 3yi = 6 + yi - i$ R: $x = 3$; $y = -\frac{2}{1}$

4. $2x + 3y + 5i = 8 + (3x + y)i$ R: $x = 1$; $y = 2$

5. $4 + (x + y)i = 2x - 2y + 4i$ R: $x = 3$; $y = 1$

6. $2x + 2yi = x + 3 + 4i$ R: $x = 3$; $y = 2$

7. $4x + (4x + y)i = 12 + (2x + 10)i$ R: $x = 3$; $y = 4$

8. $x(4 + yi) = 2x + 6 + yi + 10i$ R: $x = 3$; $y = 5$

9. $\frac{4x + yi}{4} = \frac{3x + 8 + (y + 2)i}{5}$ R: $x = 4$; $y = 8$

10. $\frac{3x + 7yi}{7} = \frac{2x + 1 + i(8y - 12)}{5}$ R: $x = 7$; $y = 4$

11. $3x - 4y + 5i = -(4x + 6) + (3y - 5x)i$ R: $x = 2$; $y = 5$

12. $\frac{2}{3}x + 9y + yi = 2x + 1 + (4y - 3)i$ R: $x = 6$; $y = 1$

13. $\frac{4x - 2y}{7} - 2i = x - 1 - \frac{2x + 4y}{3}i$ R. $x = 2$; $y = \frac{1}{2}$

14. $-4x + 6y + (3x - 5y)i = -2x + (6x - 10y + 4)i$ R: $x = -3$; $y = -1$

15. $x + y + 4yi = (2y - x + 5)i$ R: $x = -5$; $y = 5$

16. $2x - 2y + \frac{3x - y}{8}i = \frac{4}{3}x + (6y - 5)i$ R: $x = 3$; $y = 1$

17. $-6x + 3y + (2x - 4y - 3)i = -5x + y - 4 - (x + y)i$ R: $x = -2$; $y = -3$

18. $\frac{2x - 3y}{2} + 1 + \frac{3y - 5x}{2}i = y + 12 + (y - 2x - 1)i$

R: $x = -4$; $y = -6$

19. $-\frac{3x + 2y}{3} - 2 + yi = \frac{-6x + 3y}{3} - \frac{4x + 24}{4}i$

R: $x = -3$; $y = -3$

20. $\frac{7x + 13y}{2} + 3 - (x + 3y)i = 7y + x - \frac{8 - 3x + y}{6}i$

R: $x = -1$; $y = 1$

21. $mx + ny + (3mx - 2ny)i = 2mn + mni$ R: $x = n$; $y = m$

22. $\frac{2x}{a} + \frac{3y}{b} + \left(-\frac{x}{a} + \frac{7y}{b}\right)i = 5 + 6i$ R: $x = a$; $y = b$

23. *¿Para qué valor de* x *es:* a) $2 + xi$; b) $1 - (x - 2)i$; c) $-4 + (2x + 1)i$ *un número real?* R: a) 0 ; b) 2 ; c) $-\frac{1}{2}$

24. *¿Para qué valor de* x *es:* a) $3x + 2i$; b) $(x + 1) - i$; c) $(-1 + 3x) + 4i$ *un número imaginario puro?*

R: a) 0 ; b) -1 ; c) $\frac{1}{3}$

25. *¿Para qué valores de* x *y de* y*:* a) $3x + 2yi$; b) $(1 - x) + (y + 2)i$; c) $-3x - (y - 5)i$ *representan al número 0?*

R: a) $x = y = 0$; b) $x = 1$, $y = -2$; c) $x = 0$, $y = 5$

Suma y resta. — ***Efectuar las sumas y restas siguientes:***

1. $(10 + 3i) + (8 + 2i) + (4 + 5i)$ R: $22 + 10i$

2. $(9 + 2i) + (6 + 4i) + (2 + 2i) + (4 + 3i)$ R: $21 + 11i$

3. $(2 - 3i) + (-5 + 5i) + (5 + 2i) + (4 + 3i)$ R: $6 + 7i$

4. $(-3 + 8i) + (-3 - 8i) - (12 - 2i) + (-3 + 2i)$ R: $-21 + 4i$

5. $(-9 + 6i) + (-3 - 2i) + (8 - 9i) - (1 - i)$ R: $-5 - 4i$

6. $(7 + 5i) - (3 - 4i) - (-5 + 2i)$ R: $9 + 7i$

7. $(3{,}5 + 2i) - (3{,}5 + 0{,}5i)$ R: $-1{,}5i$

8. $\left(1 + \frac{1}{2}i\right) + \left(3 - \frac{3}{2}i\right) + (-4 + i)$ R: 0

9. $\left(8 - \frac{3}{2}i\right) - (8{,}5 + 0{,}05i)$ R: $-0{,}5 - 1{,}55i$

10. $\left(-8 + \frac{3}{5}i\right) + \left(-\frac{7}{4} + \frac{7}{10}i\right) + \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{10}i\right)$ R: $-10 + i$

11. $\left(7\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2}i\right) - \left(10 + 3\frac{1}{5}i\right)$ R: $-2\frac{1}{4} - 4\frac{7}{10}i$

12. $(7 + i) + (7 + 3i) + \left(\frac{1}{4} + 2i\right) + \left(-\frac{9}{4} - 2i\right)$ R: $12 + 4i$

13. $\left(-4\frac{1}{3} - \frac{1}{4}i\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{4}i\right) - \left(-2\frac{1}{2} - \frac{3}{4}i\right)$ R: $-2\frac{1}{2} - \frac{3}{4}i$

14. $\left(\frac{7}{9} + 2i\right) + \left(-\frac{4}{3} - 3i\right) + \left(\frac{14}{9} + i\right)$ R: 1

15. $\left(\frac{2}{5} + i\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4}i\right) + \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{4}i\right) + \left(-\frac{28}{15} - \frac{3}{2}i\right)$ R: $-i$

16. $\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{5}i\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)+\left(\frac{5}{6}+\frac{3}{10}i\right)+\left(-1-\frac{16}{5}i\right)$ R: $1-i$

17. $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}i\right)+\left(-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}i\right)+\left(\frac{5}{6}-\frac{4}{5}i\right)+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{10}i\right)$ R: $1+i$

18. $\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i\right)+\left(-\frac{13}{21}+\frac{19}{8}i\right)+\left(2-\frac{3}{4}i\right)+\left(\frac{2}{7}+\frac{7}{8}i\right)$ R: $1+2i$

19. $\left(-\frac{3}{10}+\frac{2}{7}i\right)+\left(\frac{19}{20}+\frac{27}{14}i\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}i\right)+\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{7}i\right)$ R: $2+i$

20. $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i\right)+(2-3i)+\left(-\frac{2}{3}+3i\right)+\left(-\frac{3}{2}+i\right)$ R: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

21. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ R: $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

22. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\right)$ R: $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

23. $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{5}}{4}i\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)$ R: $\frac{7\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{12}+\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4}i$

24. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{3}i\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)+\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{5}}{6}i\right)$ R: $\frac{5\sqrt{3}}{4}+\frac{2\sqrt{5}}{3}i$

25 $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{3\sqrt{3}}{4}i\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)+\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+(-\sqrt{2}-\sqrt{3}i)$ R: $\sqrt{2}$

26. $(a^2+b^2i)+(-2ab+a^2i)+(b^2-2abi)$ R: $(a-b)^2+(a-b)^2i$

27. $\left(\frac{a}{b}+\frac{m}{n}i\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{n}{m}i\right)+(2+2i)$ R: $\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{(m+n)^2}{mn}i$

28. $[(a+b)+(a-b)i]+[(a-b)+(a+b)i]+(-2a-2ai)$ R: 0

29. $\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{x-y}{x+y}i\right)+\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{x+y}{x-y}i\right)+\left(-\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}i\right)$ R: $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}i$

30. $\left(\frac{3a}{9a^2-1}+\frac{2a}{3x}i\right)+\left(\frac{4}{3a-1}-\frac{3a}{4x}i\right)+\left(-\frac{5}{3a+1}+\frac{5a}{6x}i\right)$ R: $\frac{9}{9a^2-1}+\frac{3a}{4x}i$

Multiplicación. — *Hallar los productos siguientes:*

1. $(5+3i)(3+2i)$ R: $9+19i$
2. $(10+2i)(3+15i)$ R: $156i$
3. $(1+i)(2+3i)$ R: $-1+5i$
4. $(4+i)(2+i)$ R: $7+6i$
5. $(-1+i)(3-2i)$ R: $-1+5i$
6. $(-4+i)(4-i)$ R: $-15+8i$
7. $(-5-2i)(5+2i)$ R: $-21-20i$
8. $(1+3i)(1-3i)$ R: 10 9. $(3+2i)(3-2i)$ R: 13
10. $(-1+i)(-1-i)$ R: 2 11. $-\frac{3}{5}i\cdot\frac{4}{3}i$ R: $\frac{4}{5}$
12. $-\frac{8}{3}i\cdot\frac{9}{4}i\cdot\frac{5}{9}i$ R: $\frac{10}{3}i$ 13. $-i\cdot i\cdot\frac{1}{2}i\cdot\frac{7}{5}\cdot i$ R: $-\frac{7}{10}$
14. $-3i\cdot 4i\cdot\frac{1}{6}i\cdot\frac{i}{8}\cdot\frac{9}{5}i$ R: $-\frac{9}{20}i$
15. $0{,}2i\cdot 1{,}4i\cdot -i\cdot 0{,}5i\cdot 10i\cdot 0{,}1i$ R: 0,14

16. $(1+i)(2+i)(3+i)$ — R: $10i$

17. $(1-i)(2-i)(3-i)$ — R: $-10i$

18. $(4-2i)(3+5i)(4+2i)$ — R: $60+100i$

19. $(1+i)(2+3i)(1-i)$ — R: $4+6i$

20. $(2+2i)(2+3i)(2-2i)$ — R: $16+24i$

21. $\left(\frac{1}{2}+2i\right)\left(2+\frac{1}{2}i\right)(4+8i)$ — R: $-34+17i$

22. $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{3}{4}+3i\right)(1-i)$ — R: $\frac{11}{8}+\frac{27}{8}i$

23. $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{5}{12}-\frac{5}{4}i\right)$ — R: $\frac{125}{72}$

24. $\left(-\frac{7}{5}-\frac{15}{5}i\right)\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}i\right)(3+3i)$ — R: $\frac{218}{25}$

25. $\left(\frac{1}{3}+i\right)\left(\frac{3}{2}-i\right)\left(2-\frac{5}{6}i\right)$ — R: $\frac{169}{36}$

26. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i)(\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i)$ — R: $5i$

27. $(\sqrt{5}+\sqrt{15}\,i)(\sqrt{15}+\sqrt{5}\,i)$ — R: $20i$

28. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$ — R: 1

29. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\right)\left(\frac{2}{3}+4i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\right)$ — R: $1+6i$

30. $(-\sqrt{2}-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)(1+2\sqrt{6}i)$ — R: 25

División. — *Hallar los cocientes siguientes:*

1 $(4+6i):(1+i)$ R: $5+i$

2. $(5+10i):(4+3i)$ R: $2+$

3. $(-4+2i):(1+i)$ R: $-1+3i$

4. $(10-4i):(1-i)$ R: $7+3i$

5. $(7+24i):(4+3i)$ R: $4+3i$

6. $(1+i):(1-i)$ R: i

7. $(-1+i):(-1-i)$ R: $-i$

8. $(4+2i):i$ R: $2-4i$

9. $(-5+2i):-i$ R: $-2-5i$

10. $(1+7i)(1+2i)$ R: $3+i$

11. $\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{6}i\right):\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i\right)$ — R: $3-i$

12. $\left(-\frac{4}{15}+\frac{23}{15}i\right):\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}i\right)$ — R: $2+i$

13. $\left(\frac{5}{6}+\frac{29}{24}i\right):\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}i\right)$ — R: $\frac{1}{2}+2i$

14. $\left(-\frac{1}{3}+\frac{25}{6}i\right):\left(2+\frac{1}{2}i\right)$ — R: $\frac{1}{3}+2i$

15. $\left(\frac{1}{2}+\frac{13}{8}i\right):\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i\right)$ — R: $3+\frac{1}{2}i$

16. $\left(2-\frac{5}{6}i\right):\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i\right)$ — R: $3+2i$

17. $\left(-\frac{1}{8}+\frac{17}{32}i\right):\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{8}i\right)$ — R: $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i$

18. $\left(\frac{5}{3}+\frac{13}{3}i\right):\left(3+\frac{4}{3}i\right)$ — R: $1+i$

19. $\left(-\frac{7}{6}-\frac{17}{6}i\right):\left(2+\frac{5}{6}i\right)$ — R: $-1-i$

20. $\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}i\right):\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{4}i\right)$ — R: i

1. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}i):(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)$ — R: $-\frac{1}{5}+\frac{2\sqrt{6}}{5}i$

22. $(\sqrt{3}+\sqrt{6}i):(\sqrt{2}+i)$ — R: $\frac{2\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i$

23. $(2\sqrt{10}+3i):(\sqrt{5}-\sqrt{2}i)$ — R: $\sqrt{2}+\sqrt{5}i$

24. $\left(\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}i\right):\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ — R: $2+i$

25. $\frac{13\sqrt{2}}{6}i:\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ — R: $3+2i$

Potencias de la unidad imaginaria. — *Calcular las potencias siguientes:*

1. i^5	R: i	2. i^{12}	R: 1
3. i^{15}	R: $-i$	4. i^{17}	R: i
5. i^{22}	R: -1	6. i^{25}	R: i
7. i^{32}	R: 1	8. i^{35}	R: $-i$
9. i^{40}	R: 1	10. i^{60}	R: 1
11. i^{63}	R: $-i$	12. i^{77}	R: i
13. i^{87}	R: $-i$	14. i^{104}	R: 1
15. i^{563}	R: $-i$	16. i^{602}	R: -1
17. i^{580}	R: 1	18. i^{3301}	R: i
19. i^{2510}	R: -1	20. i^{6223}	R: $-i$

Solución del **19.** — Siendo $\begin{array}{r|l} 2510 & 4 \\ \hline 2 & 627 \end{array}$ es $2510 = 4 \,.\, 627 + 2$

e $i^{2510} = i^{4\,.\,627+2}$ y por la recíproca del producto de pot. de ig. base

y pot. de pot. $i^{2510} = (i^4)^{627} \,.\, i^2$ y como $i^4 = 1$ e $i^2 = -1$

resulta $i^{2510} = 1^{627} \,.\, (-1) = 1 \,.\, -1 = -1$

21. $(-i)^2$	R: -1	22. $(-i)^3$	R: i
23. $(-i)^{13}$	R: $-i$	24. $(-i)^{257}$	R: $-i$
25. $(-i)^{4828}$	R: 1		

Solución: $(-i)^{4828} = i^{4828} = (i^4)^{1207} = 1^{1207} = 1$

Potencias de exponente natural de un complejo. — *Hallar los cuadrados y cubos siguientes:*

1. $(2+3i)^2$	R: $-5+12i$	2. $(4+2i)^2$	R: $12+16i$
3. $(9+5i)^2$	R: $56+90i$	4. $(1+2i)^2$	R: $-3+4i$
5. $(4+i)^2$	R: $15+8i$	6. $(3-2i)^2$	R: $5-12i$
7. $(-9+3i)^2$	R: $72-54i$	8. $(6-2i)^2$	R: $32-24i$
9. $(-2-i)^2$	R: $3+4i$	10. $(-1+i)^2$	R: $-2i$

11. $(1+i)^2$	R: $2i$	12. $(-2-3i)^2$	R: $-5+12i$
13. $(-5+3i)^2$	R: $16-30i$	14. $(4-3i)^2$	R: $7-24i$
15. $(3-3i)^2$	R: $-18i$	16. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i\right)^2$	R: $\frac{5}{36}+\frac{1}{3}i$

17. $\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{2}i\right)^2$ R: $-\frac{9}{100}+\frac{2}{5}i$

18. $\left(-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}i\right)^2$ R: $-\frac{1}{4}+\frac{10}{9}i$

19. $\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i\right)^2$ R: $-\frac{3}{16}-\frac{1}{4}i$

20. $\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{5}i\right)^2$ R: $\frac{-341}{1225}+\frac{12}{35}i$

21. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i)^2$ R: $-1+2\sqrt{6}\,i$

22. $(\sqrt{10}+\sqrt{5}\,i)^2$ R: $5+10\sqrt{2}\,i$

23. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{3}i\right)^2$ R: $\frac{7}{36}+\frac{\sqrt{15}}{3}i$

24. $(-\sqrt{12}+\sqrt{3}\,i)^2$ R: $9-12i$

25. $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}-\frac{\sqrt{7}}{6}i\right)^2$ R: $\frac{13}{36}+\frac{\sqrt{35}}{9}i$

26. $(1+i)^3$	R: $-2+2i$	27. $(1-i)^3$	R: $-2-2i$
28. $(-2+i)^3$	R: $-2+11i$	29. $(-1-i)^3$	R: $2-2i$
30. $(3+2i)^3$	R: $-9+46i$	31. $(2+5i)^3$	R: $-142-65i$
32. $(3-2i)^3$	R: $-9-46i$	33. $(4-i)^3$	R: $52-47i$
34. $(1-2i)^3$	R: $-11+2i$	35. $(2+3i)^3$	R: $-46+9i$

36. $\left(\frac{1}{2}+i\right)^3$ R: $-\frac{11}{8}-\frac{1}{4}i$

37. $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i\right)^3$ R: $-\frac{11}{64}-\frac{1}{32}i$

38. $\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}i\right)^3$ R: $-\frac{59}{54}+\frac{115}{216}i$

39. $\left(-\frac{2}{3}-3i\right)^3$ R: $\frac{478}{27}+23i$

40. $\left(-\frac{2}{3}+2i\right)^3$ R: $\frac{208}{27}-\frac{16}{3}i$

41. $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}i\right)^3$ R: $\frac{2}{27}+\frac{11}{27}i$

42. $\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)^3$ R: $-\frac{117}{125}+\frac{44}{125}i$

43. $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}i\right)^3$ R: $-\frac{9}{64}-\frac{23}{32}i$

44. $\left(-\frac{5}{6}+\frac{2}{3}i\right)^3$ R: $\frac{115}{216}+\frac{59}{54}i$

45. $\left(-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}i\right)^3$ R: $\frac{13}{24}-\frac{11}{54}i$

Raíces cuadradas de un número real negativo — *Hallar las raíces siguientes:*

1. $\sqrt{-4}$ R: $\pm 2i$
2. $\sqrt{-9}$ R: $\pm 3i$
3. $\sqrt{-16}$ R: $\pm 4i$
4. $\sqrt{-25}$ R: $\pm 5i$
5. $\sqrt{-36}$ R: $\pm 6i$
6. $\sqrt{-49}$ R: $\pm 7i$
7. $\sqrt{-64}$ R: $\pm 8i$
8. $\sqrt{-81}$ R: $\pm 9i$
9. $\sqrt{-100}$ R: $\pm 10i$
10. $\sqrt{-121}$ R: $\pm 11i$
11. $\sqrt{-144}$ R: $\pm 12i$
12. $\sqrt{-169}$ R: $\pm 13i$
13. $\sqrt{-196}$ R: $\pm 14i$
14. $\sqrt{-225}$ R: $\pm 15i$
15. $\sqrt{-400}$ R: $\pm 20i$
16. $\sqrt{-900}$ R: $\pm 30i$
17. $\sqrt{-2500}$ R: $\pm 50i$
18. $\sqrt{-3600}$ R: $\pm 60i$
19. $\sqrt{-10.000}$ R: $\pm 100i$
20. $\sqrt{-15376}$ R: $\pm 124i$

21. $\sqrt{-\frac{1}{4}}$ R: $\pm\frac{1}{2}i$
22. $\sqrt{-\frac{1}{9}}$ R: $\pm\frac{1}{3}i$
23. $\sqrt{-\frac{1}{25}}$ R: $\pm\frac{1}{5}i$
24. $\sqrt{-\frac{1}{81}}$ R: $\pm\frac{1}{9}i$
25. $\sqrt{-\frac{1}{100}}$ R: $\pm\frac{1}{10}i$
26. $\sqrt{-\frac{4}{100}}$ R: $\pm 0{,}2i$
27. $\sqrt{-\frac{100}{81}}$ R: $\pm\frac{10}{9}i$
28. $\sqrt{-1\frac{9}{16}}$ R: $\pm\frac{5}{4}i$
29. $\sqrt{-0{,}25}$ R: $\pm 0{,}5i$
30. $\sqrt{-0{,}0009}$ R: $\pm 0{,}03i$
31. $\sqrt{-8}$ R: $\pm 2\sqrt{2}i$
32. $\sqrt{-12}$ R: $\pm 2\sqrt{3}i$
33. $\sqrt{-18}$ R: $\pm 3\sqrt{2}i$
34. $\sqrt{-32}$ R: $\pm 4\sqrt{2}i$
35. $\sqrt{-27}$ R: $\pm 3\sqrt{3}i$
36. $\sqrt{-162}$ R: $\pm 9\sqrt{2}i$
37. $\sqrt{-125}$ R: $\pm 5\sqrt{5}i$
38. $\sqrt{-245}$ R: $\pm 7\sqrt{5}i$
39. $\sqrt{-252}$ R: $\pm 6\sqrt{7}i$
40. $\sqrt{-3888}$ R: $\pm 36\sqrt{3}i$
41. $\sqrt{-a^2-2ab-b^2}$ R: $\pm(a+b)i$
42. $\sqrt{-a^2+2ab-b^2}$ R: $\pm(a-b)i$
43. $\sqrt{-x^2-4x-4}$ R: $\pm(x+2)i$
44. $\sqrt{-y^2+12y-36}$ R: $\pm(y-6)i$
45. $\sqrt{-a^4-2a^2b-b^2}$ R: $\pm(a^2+b)i$
46. $\sqrt{-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3}$ R: $\pm(a+b)\sqrt{a+b}\;i$
47. $\sqrt{-x^3+3x^2y-3xy^2+y^3}$ R: $\pm(x-y)\sqrt{x-y}\;i$
48. $\sqrt{-a^3-6a^2-12a-8}$ R: $\pm(a+2)\sqrt{a+2}\;i$
49. $\sqrt{-a^3+9a^2-27a+27}$ R: $\pm(a-3)\sqrt{a-3}\;i$
50. $\sqrt{\frac{-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3}{a+b}}$ R: $\pm(a+b)i$

ECUACIONES EN SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA (*)

Las ecuaciones de segundo grado con una incógnita fueron resueltas por los antiguos babilonios, árabes y egipcios, por los griegos entre los que se destacan Euclides y Diofanto de Alejandría que emplean recursos geométricos; el primero para resolverlas y el segundo para justificar el método utilizado. Las ecuaciones cuyas soluciones eran nulas, negativas, irracionales o complejas se desechaban considerándolas absurdas o imposibles. Además sólo se tenía en cuenta una de las raíces aún en el caso de que ambas fueran naturales o fraccionarias. En la India fueron resueltas algebraicamente; y el llamado método hindú, debido a Sridhara (1020), suele enseñarse en las Escuelas Secundarias para deducir la fórmula de resolución de la ecuación completa general. No consideraban absurdas las ecuaciones con raíces negativas sino que decían que eran "inadecuadas" porque la gente no admite soluciones negativas. Más tarde en 1150 a. J. C. se publicó un trabajo de Bhaskara en el que por primera vez se admiten las raíces negativas sin ese calificativo.

Se cree que Stevin (holandés, 1548-1620), fué el primero que utilizó una fórmula única para resolver cualquier ecuación de segundo grado con una incógnita. Sólo después que los trabajos de Descartes y de Gauss se divulgaron se tuvo una idea clara sobre el número y naturaleza de las raíces de esas ecuaciones.

Ecuaciones reducidas con el coeficiente de x par. — *Ejercicios con raíces enteras.*

1. $x^2 - 4x + 3 = 0$ — R: $x_1 = 3, x_2 = 1$
2. $x^2 - 6x + 5 = 0$ — R: $x_1 = 5, x_2 = 1$
3. $x^2 - 8x + 15 = 0$ — R: $x_1 = 5; x_2 = 3$
4. $x^2 - 6x + 8 = 0$ — R: $x_1 = 4, x_2 = 2$
5. $x^2 - 2x + 1 = 0$ — R: $x_1 = x_2 = 1$
6. $x_2 - 6x + 9 = 0$ — R: $x_1 = x_2 = 3$
7. $x^2 - 8x + 7 = 0$ — R: $x_1 = 7, x_2 = 1$
8. $x^2 - 10x + 16 = 0$ — R: $x_1 = 2, x_2 = 5$

(*) En el Apéndice, pág. 216, se hacen interesantes aplicaciones de las *propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado con una incógnita* y en las pags. 258 y 259 se explica *Otra manera de resolver esas ecuaciones* y en las págs. 228 a 233, se trata la resolución de *ecuaciones irracionales* e *inecuaciones de segundo grado*

9. $x^2 - x - 12 = 0$ — R: $x_1 = 4, x_2 = -3$
10. $x^2 + x - 12 = 0$ — R: $x_1 = 3, x_2 = -4$
11. $x^2 - 2x - 8 = 0$ — R: $x_1 = -2, x_2 = +4$

11' $x^2 + 6x + 8 = 0$ — R: $x_1 = -2; x_2 = -4$

12. $x^2 + 2x - 8 = 0$ — R: $x_1 = +2, x_2 = -4$

12' $x^2 + 8x + 12 = 0$ — R: $x_1 = -2; x_2 = -6$

13. $x^2 + 8x + 15 = 0$ — R: $x_1 = -3, x_2 = -5$
14. $x^2 + 6x + 9 = 0$ — R: $x_1 = x_2 = -3$
15. $x^2 + 10x + 16 = 0$ — R: $x_1 = -2, x_2 = -8$
16. $x^2 + 20x + 75 = 0$ — R: $x_1 = -5, x_2 = -15$
17. $x^2 + 14x + 45 = 0$ — R: $x_1 = -5, x_2 = -9$
18. $x^2 + 12x + 20 = 0$ — R: $x_1 = -2, x_2 = -10$
19. $x^2 - 2x - 3 = 0$ — R: $x_1 = -1, x_2 = 3$
20. $x^2 + 4x + 3 = 0$ — R: $x_1 = -1, x_2 = -3$
21. $x^2 - 2x - 15 = 0$ — R: $x_1 = 5, x_2 = -3$
22. $x^2 - 4x - 12 = 0$ — R: $x_1 = 6, x_2 = -2$
23. $x^2 - 10x - 24 = 0$ — R: $x_1 = 12, x_2 = -2$
24. $x^2 - 2x - 35 = 0$ — R: $x_1 = 7, x_2 = -5$
25. $x^2 + 6x - 16 = 0$ — R: $x_1 = 2, x_2 = -8$
26. $x^2 + 4x - 5 = 0$ — R: $x_1 = 1, x_2 = -5$
27. $x^2 + 8x - 9 = 0$ — R: $x_1 = 1, x_2 = -9$
28. $x^2 + 10x - 75 = 0$ — R: $x_1 = 5, x_2 = -15$
29. $x^2 + 2x + 1 = 0$ — R: $x_1 = x_2 = -1$
30. $x^2 + 2x - 3 = 0$ — R: $x_1 = 1, x_2 = -3$

Ejercicios con raíces irracionales.

31. $x^2 - 4x + 1 = 0$ — R: $x_1 = 2 + \sqrt{3}$; $x_2 = 2 - \sqrt{3}$
32. $x^2 - 6x + 4 = 0$ — R: $x_1 = 3 + \sqrt{5}$; $x_2 = 3 - \sqrt{5}$
33. $x^2 + 4x + 1 = 0$ — R: $x_1 = -2 + \sqrt{3}$; $x_2 = -2 - \sqrt{3}$

34. $x^2 - 10x + 18 = 0$ R: $x_1 = 5 + \sqrt{7}$; $x_2 = 5 - \sqrt{7}$

35. $x^2 - 2x - 1 = 0$ R: $x_1 = 1 + \sqrt{2}$; $x_2 = 1 - \sqrt{2}$

36. $x^2 - 6x + 7 = 0$ R: $x_1 = 3 + \sqrt{2}$; $x_2 = 3 - \sqrt{2}$

37. $x^2 - 6x + 6 = 0$ R: $x_1 = 3 + \sqrt{3}$; $x_2 = 3 - \sqrt{3}$

38. $x^2 + 2x - 1 = 0$ R: $x_1 = -1 + \sqrt{2}$; $x_2 = -1 - \sqrt{2}$

39. $x^2 - 4x - 1 = 0$ R: $x_1 = 2 + \sqrt{5}$; $x_2 = 2 - \sqrt{5}$

40. $x^2 - 8x + 9 = 0$ R: $x_1 = 4 + \sqrt{7}$; $x_2 = 4 - \sqrt{7}$

41. $x^2 - 4x - 7 = 0$ R: $x_1 = 2 + \sqrt{11}$; $x_2 = 2 - \sqrt{11}$

42. $x^2 - 6x + 1 = 0$ R: $x_1 = 3 + 2\sqrt{2}$; $x_2 = 3 - 2\sqrt{2}$

43. $x^2 + 8x + 4 = 0$ R: $x_1 = -4 + 2\sqrt{3}$; $x_2 = -4 - 2\sqrt{3}$

44. $x^2 + 10x + 7 = 0$ R: $x_1 = -5 + 3\sqrt{2}$; $x_2 = -5 - 3\sqrt{2}$

45. $x^2 - 8x + 3 = 0$ R: $x_1 = 4 + \sqrt{13}$; $x_2 = 4 - \sqrt{13}$

46. $x^2 - 12x + 21 = 0$ R: $x_1 = 6 + \sqrt{15}$; $x_2 = 6 - \sqrt{15}$

47. $x^2 - 6x - 5 = 0$ R: $x_1 = 3 + \sqrt{14}$; $x_2 = 3 - \sqrt{14}$

48. $x^2 + 10x - 3 = 0$ R: $x_1 = -5 + 2\sqrt{7}$; $x_2 = -5 - 2\sqrt{7}$

49. $x^2 - 8x + 1 = 0$ R: $x_1 = 4 + \sqrt{15}$; $x_2 = 4 - \sqrt{15}$

50. $x^2 + 12x - 9 = 0$ R: $x_1 = -6 + 3\sqrt{5}$; $x_2 = -6 - 3\sqrt{5}$

Ejercicios con raíces complejas.

51. $x^2 - 2x + 2 = 0$ R: $x_1 = 1 + i$; $x_2 = 1 - i$

52. $x^2 - 4x + 13 = 0$ R: $x_1 = 2 + 3i$; $x_2 = 2 - 3i$

53. $x^2 + 4x + 29 = 0$ R: $x_1 = -2 + 5i$; $x_2 = -2 - 5i$

54. $x^2 - 8x + 17 = 0$ R: $x_1 = 4 + i$; $x_2 = 4 - i$

55. $x^2 + 2x + 2 = 0$ R: $x_1 = -1 + i$; $x_2 = -1 - i$

56. $x^2 + 6x + 13 = 0$ R: $x_1 = -3 + 2i$; $x_2 = -3 - 2i$

57. $x^2 - 10x + 29 = 0$ R: $x_1 = 5 + 2i$; $x_2 = 5 - 2i$

58. $x^2 - 12x + 157 = 0$ R: $x_1 = 6 + 11i$; $x_2 = 6 - 11i$

59. $x^2 + 14x + 74 = 0$ R: $x_1 = -7 + 5i$; $x_2 = -7 - 5i$

60. $x^2 - 4x + 5 = 0$ R: $x_1 = 2 + i$; $x_2 = 2 - i$

61. $x^2 + 4x + 8 = 0$ R: $x_1 = -2 + 2i$; $x_2 = -2 - 2i$

62. $x^2 + 6x + 10 = 0$ R: $x_1 = -3 + i$; $x_2 = -3 - i$

63. $x^2 + 2x + 5 = 0$ R: $x_1 = -1 + 2i$; $x_2 = -1 - 2i$

64. $x^2 - 8x + 25 = 0$ R: $x_1 = 4 + 3i$; $x_2 = 4 - 3i$

65. $x^2 + 12x + 45 = 0$ R: $x_1 = -6 + 3i$; $x_2 = -6 - 3i$

66. $x^2 - 2x + 3 = 0$ R: $x_1 = 1 + i\sqrt{2}$; $x_2 = 1 - i\sqrt{2}$

67. $x^2 - 4x + 7 = 0$ R: $x_1 = 2 + i\sqrt{3}$; $x_2 = 2 - i\sqrt{3}$

68. $x^2 + 6x + 12 = 0$ R: $x_1 = -3 + i\sqrt{3}$; $x_2 = -3 - i\sqrt{3}$

69. $x^2 + 4x + 9 = 0$ R: $x_1 = -2 + i\sqrt{5}$; $x_2 = -2 - i\sqrt{5}$

70. $x^2 + 10x + 32 = 0$ R: $x_1 = -5 + i\sqrt{7}$; $x_2 = -5 - i\sqrt{7}$

71. $x^2 - 6x + 11 = 0$ R: $x_1 = 3 + i\sqrt{2}$; $x_2 = 3 - i\sqrt{2}$

72. $x^2 - 8x + 22 = 0$ R: $x_1 = 4 + i\sqrt{6}$; $x_2 = 4 - i\sqrt{6}$

73. $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$ R: $x_1 = a + bi$; $x_2 = a - bi$

74. $x^2 - 2(a+b)x + 2(a^2+b^2) = 0$ R: $x_1 = (a+b) + (a-b)i$; $x_2 = (a+b) - (a-b)i$

75. $x^2 - 2ax + a^2 + 1 = 0$ R: $x_1 = a + i$; $x_2 = a - i$

76. $x^2 + 6ax + 9a^2 + 4b^2 = 0$ R: $x_1 = -3a + 2bi$; $x_2 = -3a - 2bi$

77. $x^2 - 2mnx + n^2(m^2 + 1) = 0$ R: $x_1 = mn + ni$; $x_2 = mn - ni$

78. $x^2 + 2acx + c^2(a^2 + b^2) = 0$ R: $x_1 = -ac + bci$; $x_2 = -ac - bci$

79. $x^2 - 2a^2x + a^4 + b^4 = 0$ R: $x_1 = a^2 + b^2 i$; $x_2 = a^2 - b^2 i$

80. $x^2 + 2ax + a^2 + 3 = 0$ R: $x_1 = -a + i\sqrt{3}$; $x_2 = -a - i\sqrt{3}$

Ecuaciones reducidas con el coeficiente de x impar.

1. $x^2 - 7x + 10 = 0$ R: $x_1 = 5$; $x_2 = 2$

2. $x^2 - 3x - 18 = 0$ R: $x_1 = 6$; $x_2 = -3$

3. $x^2+5x-14=0$ R: $x_1=2$; $x_2=-7$

4. $x^2+11x+24=0$ R: $x_1=-3$; $x_2=-8$

5. $x^2-7x+6=0$ R: $x_1=6$; $x_2=1$

6. $x^2+x-20=0$ R: $x_1=4$; $x_2=-5$

7. $x^2-3x-10=0$ R: $x_1=+5$; $x_2=-2$

8. $x^2+3x-10=0$ R: $x_1=2$; $x_2=-5$

9. $x^2-x-12=0$ R: $x_1=4$; $x_2=-3$

10. $x^2+x-12=0$ R: $x_1=3$; $x_2=-4$

11. $x^2-5x+5=0$ R: $x_1=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$; $x_2=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$

12. $x^2+9x+5=0$ R: $x_1=-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{61}$; $x_2=-\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{61}$

13. $x^2+7x-6=0$ R: $x_1=-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{73}$; $x_2=-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{73}$

14. $x^2-3x-3=0$ R: $x_1=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21}$; $x_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21}$

15. $x^2+x-7=0$ R: $x_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{29}$; $x_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{29}$

16. $x^2-11x-14=0$ R: $x_1=\frac{11}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{177}$; $x_2=\frac{11}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{177}$

17. $x^2+7x+2=0$ R: $x_1=-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{41}$; $x_2=-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{41}$

18. $x^2-15x+3=0$ R: $x_1=\frac{15}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{213}$; $x_2=\frac{15}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{213}$

19. $x^2+17x+9=0$ R: $x=-\frac{17}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{253}$; $x_2=-\frac{17}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{253}$

20. $x^2+5x+16=0$ R: $x_1=-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{39}\,i$; $x_2=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{39}\,i$

21. $x^2-3x+11=0$ R: $x_1=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{35}\,i$; $x_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{35}\,i$

22. $x^2+5x+8=0$ R: $x_1=-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{7}\,i$; $x_2=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{7}\,i$

23. $x^2+x+7=0$ R: $x_1=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i$; $x_2=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\,i$

24. $x^2-3x+6=0$ R: $x_1=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{15}\,i$; $x_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{15}\,i$

25. $x^2-9x+23=0$ R: $x_1=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{11}\,i$; $x_1=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{11}\,i$

26. $x^2+7x+15=0$ R: $x_1=-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{11}\,i$; $x_2=-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{11}\,i$

27. $x^2-11x+32=0$ R: $x_1=\frac{11}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{7}\,i$; $x_2=\frac{11}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{7}\,i$

28. $x^2-5x+9=0$ R: $x_1=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{11}\,i$; $x_2=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{11}\,i$

29. $x^2-3x+15=0$ R: $x_1=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{51}\,i$; $x^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{51}\,i$

30. $x^2-x-11=0$ R: $x_1=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5}$; $x_2=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{5}$

Ecuaciones reducidas con coeficientes racionales.

1. $x^2-\frac{7}{12}x-\frac{5}{6}=0$ R: $x_1=\frac{5}{4}$; $x_2=-\frac{2}{3}$

2. $x^2-\frac{9}{28}x+\frac{1}{98}=0$ R: $x_1=\frac{2}{7}$; $x_2=\frac{1}{28}$

3 $x^2+\frac{13}{30}x-\frac{1}{10}=0$ R: $x_1=\frac{1}{6}$; $x_2=-\frac{3}{5}$

4. $x^2-\frac{1}{10}x-\frac{3}{25}=0$ R: $x_1=\frac{2}{5}$; $x_2=-\frac{3}{10}$

5. $x^2 + \frac{25}{24}x + \frac{1}{4} = 0$ R: $x_1 = -\frac{3}{8}$; $x_2 = -\frac{2}{3}$

6. $x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{49}{25} = 0$ R: $x_1 = \frac{1}{5} + \sqrt{2}$; $x_2 = \frac{1}{5} - \sqrt{2}$

7. $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{32} = 0$ R: $x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}$; $x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}$

8. $x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{2}{25} = 0$ R: $x_1 = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{11}$; $x_2 = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{11}$

9. $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$ R: $x_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}$; $x_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}$

10. $x^2 + \frac{20}{7}x + 2 = 0$ R: $x_1 = -\frac{10}{7} + \frac{1}{7}\sqrt{2}$; $x_2 = -\frac{10}{7} - \frac{1}{7}\sqrt{2}$

11. $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{7}{5} = 0$ R: $x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{58}{5}}\,i$; $x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{58}{5}}\,i$

12. $x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} = 0$ R: $x_1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{95}\,i$; $x_2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{95}\,i$

13. $x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{3}{7} = 0$ R: $x_1 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{\frac{68}{7}}\,i$; $x_2 = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{\frac{68}{7}}\,i$

14. $x^2 - \frac{2}{7}x + \frac{3}{5} = 0$ R: $x_1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}\sqrt{\frac{142}{5}}\,i$; $x_2 = \frac{1}{7} - \frac{1}{7}\sqrt{\frac{142}{5}}\,i$

15. $x^2 + \frac{3}{10}x - \frac{5}{8} = 0$ R: $x_1 = -\frac{3}{20} + \frac{1}{20}\sqrt{259}$; $x_2 = -\frac{3}{20} - \frac{1}{20}\sqrt{259}$

Ecuaciones incompletas. — *Aplicar las fórmulas de las ecuaciones completas para resolver las siguientes ecuaciones:*

Ecuaciones de los tipos: $ax^2 = 0$ *y* $ax^2 + c = 0$

1. $x^2 = 0$ R: $x_1 = x_2 = 0$

2. $-7x^2 = 0$ R: $x_1 = x_2 = 0$

3. $\frac{3}{4}x^2 = 0$ R: $x_1 = x_2 = 0$

4. $\sqrt{5}\,x^2 = 0$ R: $x_1 = x_2 = 0$

5. $8x^2 = 3x^2$ R: $x_1 = x_2 = 0$

6. $\frac{3}{5}x^2 = -x^2$ R: $x_1 = x_2 = 0$

7. $3x^2 - 27 = 0$ R: $x_1 = 3$; $x_2 = -3$

8. $x^2 - 1 = 0$ R: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$

9. $-2x^2 + 8 = 0$ R: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$

10. $-10x^2 + 1000 = 0$ R: $x_1 = 10$; $x_2 = -10$

11. $4x^2 - 1 = 0$ R: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2}$

12. $-16x^2 + 9 = 0$ R: $x_1 = \frac{3}{4}$; $x_2 = -\frac{3}{4}$

13. $100x^2 - 25 = 0$ R: $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = -0{,}5$

14. $25x^2 - 1 = 0$ R: $x_1 = 0{,}2$; $x_2 = -0{,}2$

15. $\frac{1}{4}x^2 - 9 = 0$ R: $x_1 = 6$; $x_2 = -6$

16. $\frac{1}{12}x^2 - 3 = 0$ R: $x_1 = 6$; $x_2 = -6$

17. $-2x^2 + \frac{1}{2} = 0$ R: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2}$

18. $5x^2 - \frac{1}{20} = 0$ R: $x_1 = 0{,}1$; $x_2 = -0{,}1$

19. $\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4} = 0$ R: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$

20. $\frac{7}{8}x^2 - 0{,}035 = 0$ R: $x_1 = \frac{1}{5}$; $x_2 = -\frac{1}{5}$

21. $2x^2 - 10 = 0$ R: $x_1 = \sqrt{5}$; $x_2 = -\sqrt{5}$

22. $3x^2 - 24 = 0$ R: $x_1 = \sqrt{8}$ $x_2 = -\sqrt{8}$

23. $-10x^2 + 5 = 0$ R: $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

24. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8} = 0$ R: $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

25. $x^2 + 4 = 0$ R: $x_1 = 2i$; $x_2 = -2i$

26. $2x^2 + 18 = 0$ R: $x_1 = 3i$; $x_2 = -3i$

27. $4x^2 + 1 = 0$ R: $x_1 = \frac{1}{2}i$; $x_2 = -\frac{1}{2}i$

28. $x^2 + \frac{9}{4} = 0$ R: $x_1 = \frac{3}{2}i$; $x_2 = -\frac{3}{2}i$

29. $4x^2 + 3 = 0$ R: $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}i$

30. $5x^2 + 2 = 0$ R: $x_1 = \sqrt{\frac{2}{5}}\,i$; $x_2 = -\sqrt{\frac{2}{5}}\,i$

31. $6x^2 - 32 = 2x^2 + 4$ R: $x_1 = 3$; $x_2 = -3$

32. $7x^2 + 8 = 57 + 3x^2 + 15$ R: $x_1 = 4$; $x_2 = -4$

33. $10x^2 - 4 = 3x^2 - \frac{1}{16}$ R: $x_1 = \frac{3}{4}$; $x_2 = -\frac{3}{4}$

34. $2x^2 - 3{,}5 = 4x^2 - 4$ R: $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = -0{,}5$

35. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{10}{3}$ R: $x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = -\sqrt{3}$

36. $\frac{1}{2}x^2 + 2^2 = x + 3$ R: $x_1 = 1 + i$; $x_2 = -1 - i$

37. $x^2 + \frac{3}{2} = {}_6\, x^2 + \frac{2}{3}$ R: $x_1 = i$; $x_2 = -i$

38. $5x^2 + \frac{3}{4} = 27 - 5x^2$ R: $x_1 = \sqrt{\frac{21}{8}}$; $x_2 = -\sqrt{\frac{21}{8}}$

39. $\frac{8}{7}x^2 + \frac{35}{3} = 10 + \frac{x^2}{7}$ R: $x_1 = i\sqrt{\frac{5}{3}}$; $x_2 = -i\sqrt{\frac{5}{3}}$

40. $2\frac{2}{9}x^2 + 5 = \frac{11}{9}x^2 + \frac{47}{10}$ R: $x_1 = i\sqrt{0{,}3}$; $x_2 = -i\sqrt{0{,}3}$

Ecuaciones del tipo: $ax^2 + bx = 0$

1. $6x^2 - 36x = 0$ R: $x_1 = 6$; $x_2 = 0$

2. $4x^2 + 28x = 0$ R: $x_1 = 0$; $x_2 = -7$

3. $9x^2 + 72x = 0$ R: $x_1 = 0$; $x_2 = -8$

4. $11x^2 - 32x = 0$ R: $x_1 = \frac{32}{11}$; $x_2 = 0$

5. $7x^2 + 19 = 0$ R: $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{19}{7}$

6. $14x^2 - 7x = 0$ R: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 0$

7. $\frac{3}{4}x^2 - 9x = 0$ R: $x_1 = 12$; $x_1 = 0$

8. $\frac{7}{6}x^2 + \frac{21}{18}x = 0$ R: $x_1 = 0$; $x_2 = -1$

9. $\frac{6}{11}x^2 - \frac{5}{3}x = 0$ R: $x_1 = \frac{55}{18}$; $x_2 = 0$

10. $\frac{7}{9}x^2 + \frac{4}{7}x = 0$ R: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{36}{49}$

11. $\frac{4}{3}x^2 - \frac{7}{2}x = 0$ R: $x_1 = \frac{21}{8}$; $x_2 = 0$

12. $\frac{6}{5}x^2 + \frac{3}{11}x = 0$ R: $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{5}{22}$

13. $\frac{7}{4}x^2 - \frac{3}{5}x = 0$ R: $x_1 = \frac{12}{35}$; $x_2 = 0$

14. $\frac{6}{13}x^2 - \frac{7}{5}x = 0$ R: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{91}{30}$

15. $7x - 32x^2 = 5x^2 - 67x$ R: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$

16. $22x^2 - 3x = 21x + 14x^2$ R: $x_1 = 3$; $x_2 = 0$

17. $15x + 2x^2 = -6x + 14x^2$ R: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{7}{4}$

18. $-21x^2 + 16x = \frac{7}{2}x - \frac{3}{4}x^2$ R: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{50}{81}$

19. $-\frac{15}{4}x + \frac{7}{2}x^2 = -\frac{32}{5}x^2 - \frac{16}{3}x$ R: $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{95}{594}$

20. $\frac{12}{7}x^2 - \frac{3}{5}x = -\frac{6}{5}x + \frac{2}{3}x^2$ R: $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{63}{110}$

Ecuaciones completas reducidas literales.

1. $x^2 - 6ax + 8a^2 = 0$ R: $x_1 = 4a$; $x_2 = 2a$
2. $x^2 - 2ax - 8a^2 = 0$ R: $x_1 = 4a$; $x_2 = -2a$
3. $x^2 - 2(a+b)x + 4ab = 0$ R: $x_1 = 2a$; $x_2 = 2b$
4. $x^2 + (a+b)x + ab = 0$ R: $x_1 = -b$; $x_2 = -a$
5. $x^2 - 3x - (4a^2 + 6a) = 0$ R: $x_1 = 2a + 3$; $x_2 = -2a$
6. $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ R: $x_1 = a + b$; $x_2 = a - b$
7. $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ R: $x_1 = a + 1$; $x_2 = a - 1$
8. $x^2 + 2mx + m^2 = 0$ R: $x_1 = x_2 = -m$
9. $x^2 - 2ax + 6a - 9 = 0$ R: $x_1 = 2a - 3$; $x_2 = 3$
10. $x^2 - 2acx + a^2c^2 - 4 = 0$ R: $x_1 = ac + 2$; $x_2 = ac - 2$
11. $x^2 - a(3 - 5a)x - 15a^3 = 0$ R: $x_1 = 3a$; $x_2 = -5a^2$
12. $x^2 - 3b(2a - 1)x - 18ab^2 = 0$ R: $x_1 = 6ab$; $x_2 = -3b$
13. $x^2 - 4x + 4 - a^2b^2 = 0$ R: $x_1 = 2 + ab$; $x_2 = 2 - ab$
14. $x^2 - 2ax - 2a - 1 = 0$ R: $x_1 = 2a + 1$; $x_2 = -1$
15. $x^2 - (3a - bm)x + 2(a^2 - b^2m^2) = 0$ R: $x_1 = 2(a - bm)$; $x_2 = a + bm$
16. $x^2 - b(a - 3c)x - 3ab^2c = 0$ R: $x_1 = ab$; $x_2 = -3bc$
17. $x^2 - (2a - 3)x + (a^2 - 3a + 2) = 0$ R: $x_1 = a - 1$; $x_2 = a - 2$
18. $x^2 - 2acx + a^2(c^2 - b^2) = 0$ R: $x_1 = a(c + b)$; $x_2 = a(c - b)$

19. $x^2 - 2a^2bx + a^2b^2(a^2 - b^2) = 0$ R: $x_1 = ab(a + b)$; $x_2 = ab(a - b)$
20. $x^2 - 4bx + 4b^2 - a^2 = 0$ R: $x_1 = 2b + a$; $x_2 = 2b - a$
21. $x^2 - a(b + c)x + a^2bc = 0$ R: $x_1 = ab$; $x_2 = ac$
22. $x^2 - 4abx + b^2(4a^2 - b^2) = 0$ R: $x_1 = b(2a + b)$; $x_2 = b(2 - ba)$
23. $x^2 - 2(a + b)x + (a + b)^2 = 0$ R: $x_1 = x_2 = a + b$
24. $x^2 - 2a^3x + a^6 - b^6 = 0$ R: $x_1 = a^3 + b^3$; $x_2 = a^3 - b^3$
25. $x^2 - 2(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)^2 = 0$ R: $x_1 = (a + b)^2$; $x_2 = (a - b)^2$
26. $x^2 - 6acx + a^2(9c^2 - 4b^2) = 0$ R: $x_1 = a(3c + 2b)$; $x_2 = a(3c - 2b)$
27. $x^2 - (2a - 1)x + (a^2 - a - 6) = 0$ R: $x_1 = a + 2$; $x_2 = a - 3$
28. $x^2 - 3(m - 1)x + m(2m - 3) = 0$ R: $x_1 = 2m - 3$; $x_2 = m$
29. $x^2 - (3a - 4b)x + (2a^2 - 5ab + 3b^2) = 0$ R: $x_1 = 2a - 3b$; $x_2 = a - b$
30. $x^2 - 2(a + 1)x + (a^2 + 2a - 15) = 0$ R: $x_1 = a + 5$; $x_2 = a - 3$

Ecuaciones generales. — *Ejercicios con raíces racionales.*

1. $3x^2 - 17x + 10 = 0$ R: $x_1 = 5$; $x_2 = \frac{2}{3}$
2. $622x = 15x^2 + 6384$ R: $x_1 = 22{,}8$; $x_2 = \frac{56}{3}$
3. $5x^2 + 17x = -12$ R: $x_1 = -1$; $x_2 = -2{,}4$
4. $2x^2 + 5x - 7 = 0$ R: $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{7}{2}$
5. $6x^2 + 7x - 3 = 0$ R: $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = -\frac{3}{2}$
6. $4x^2 - 20x + 25 = 0$ R: $x_1 = x_2 = \frac{5}{2}$
7. $2x^2 - 3x + 1 = 0$ R: $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{2}$
8. $2x^2 + x - 1 = 0$ R: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -1$
9. $15x^2 - 11x + 2 = 0$ R: $x_1 = \frac{2}{5}$; $x_2 = \frac{1}{3}$

10. $25x^2 - 25x + 6 = 0$ — R: $x_1 = \frac{3}{5}$; $x_2 = \frac{2}{5}$

11. $3x^2 - x - 2 = 0$ — R: $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{2}{3}$

12. $9x^2 - 9x + 2 = 0$ — R: $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = \frac{1}{3}$

13. $5x^2 + 8x - 4 = 0$ — R: $x_1 = \frac{2}{5}$; $x_2 = -2$

14. $8x^2 - 14x + 3 = 0$ — R: $x_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = \frac{1}{4}$

15. $50x^2 - 85x + 21 = 0$ — R: $x_1 = \frac{7}{5}$; $x_2 = \frac{3}{10}$

16. $4x^2 + 20x + 21 = 0$ — R: $x_1 = -\frac{7}{2}$; $x_2 = -\frac{3}{2}$

17. $25x^2 - 50x + 21 = 0$ — R: $x_1 = \frac{7}{5}$; $x_2 = \frac{3}{5}$

18. $36x^2 - 36x + 5 = 0$ — R: $x_1 = \frac{5}{6}$; $x_2 = \frac{1}{6}$

19. $-x - 1 = -2x^2$ — R: $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{1}{2}$

20. $2x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} = 0$ — R: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{1}{4}$

21. $\frac{x^2}{3} = \frac{8}{3} + \frac{x}{9}$ — R: $x_1 = 3$; $x_2 = -\frac{8}{3}$

22. $0{,}1x^2 + 0{,}35x + 0{,}8 = 1$ — R: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -4$

23. $6 + 23x = 18x^2$ — R: $x_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = -\frac{2}{9}$

24. $0{,}09x^2 - 0{,}21x + 0{,}1 = 0$ — R: $x_1 = \frac{5}{3}$; $x_2 = \frac{2}{3}$

25. $\frac{x^2}{100} = x - 24$ — R: $x_1 = 60$; $x_2 = 40$

26. $3x^2 - 2x = 65$ — R: $x_1 = 5$; $x_2 = -\frac{13}{3}$

27. $10 - 37x = -30x^2$ — R: $x_1 = \frac{5}{6}$; $x_2 = \frac{2}{5}$

28. $2x^2 - 28 = 26x$ — R: $x_1 = 14$; $x_2 = -1$

29. $\frac{x}{3} - \frac{40}{4} - x^2 + 2x = 45 - 3x^2 + 4x$ — R: $x_1 = \frac{35}{6}$; $x_2 = -5$

30. $(x-6)(x-5) + (x-7)(x-4) = 2$ — R: $x_1 = 7$; $x_2 = 4$

Ecuaciones generales con raíces irracionales:

31. $2x^2 + 5x - 1 = 0$ — R: $x_1 = \frac{-5+\sqrt{33}}{4}$; $x_2 = \frac{-5-\sqrt{33}}{4}$

32. $4x^2 - 8x - 1 = 0$ — R: $x_1 = \frac{2+\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \frac{2-\sqrt{5}}{2}$

33. $9x^2 - 42x + 38 = 0$ — R: $x_1 = \frac{7+\sqrt{11}}{3}$; $x_2 = \frac{7-\sqrt{11}}{3}$

34. $\frac{3}{2}x^2 - 3x + 1 = 0$ — R: $x_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$; $x_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

35. $3x^2 - 4x - \frac{1}{3} = 0$ — R: $x_2 = \frac{2+\sqrt{5}}{3}$; $x_2 = \frac{2-\sqrt{5}}{3}$

36. $2x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0$ — R: $x_1 = \frac{3+\sqrt{7}}{4}$; $x_2 = \frac{3-\sqrt{7}}{4}$

37. $\frac{9}{2}x^2 - 18x + 17 = 0$ — R: $x_1 = \frac{6+\sqrt{2}}{3}$; $x_2 = \frac{6-\sqrt{2}}{3}$

38. $\frac{5}{8}x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ — R; $x_1 = \frac{4+\sqrt{6}}{5}$; $x_2 = \frac{4-\sqrt{6}}{5}$

39. $4x^2 + 2x - 1 = 0$ — R: $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$; $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

40. $3x^2 + 4x - 1 = 0$ — R: $x_1 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$; $x_2 = \frac{-3-\sqrt{7}}{3}$

41. $9x^2 - 18x - 4 = 0$ — R: $x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{3}$; $x_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{3}$

42. $16x^2 - 24x - 23 = 0$ — R: $x_1 = \frac{3+4\sqrt{2}}{4}$; $x_2 = \frac{3-4\sqrt{2}}{4}$

43. $4x^2 + 16x + 13 = 0$ — R: $x_1 = -2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = -2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

44. $3x^2 + 4x + \frac{1}{3} = 0$ — R: $x_1 = \frac{-2+\sqrt{3}}{3}$; $x_2 = \frac{-2-\sqrt{3}}{3}$

45. $25x^2 - 40x - 34 = 0$ R: $x_1 = \frac{4 + 5\sqrt{2}}{5}$; $x_2 = \frac{4 - 5\sqrt{2}}{5}$

46. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{11}{8} = 0$ R: $x_1 = \frac{-1 + 2\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = \frac{-1 - 2\sqrt{3}}{2}$

47. $2x^2 - 3x - \frac{39}{8} = 0$ R: $x_1 = \frac{3}{4} + \sqrt{3}$; $x_2 = \frac{3}{4} - \sqrt{3}$

48. $9x^2 - 12x - 1 = 0$ R: $x_1 = \frac{2 + \sqrt{5}}{3}$; $x_2 = \frac{2 - \sqrt{5}}{3}$

49. $\frac{3}{4}x^2 + 1{,}5x + 0{,}5 = 0$ R: $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{3}}{3}$; $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{3}}{3}$

50. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{2} = 0$ R: $x_1 = \frac{4 + \sqrt{7}}{3}$; $x_2 = \frac{4 - \sqrt{7}}{3}$

Ecuaciones generales con raíces complejas.

51. $4x^2 - 16x + 17 = 0$ R: $x_1 = 2 + \frac{1}{2}i$; $x_2 = 2 - \frac{1}{2}i$

52. $4x^2 - 24x + 37 = 0$ R: $x_1 = 3 + \frac{1}{2}i$; $x_2 = 3 - \frac{1}{2}i$

53. $9x^2 + 18x + 10 = 0$ R: $x_1 = -1 + \frac{1}{3}i$; $x_2 = -1 - \frac{1}{3}i$

54. $9x^2 + 36x + 40 = 0$ R: $x_1 = -2 + \frac{2}{3}i$; $x_2 = -2 - \frac{2}{3}i$

55. $4x^2 - 4x + 5 = 0$ R: $x_1 = \frac{1}{2} + i$; $x_2 = \frac{1}{2} - i$

56. $4x^2 + 4x + 5 = 0$ R: $x_1 = -\frac{1}{2} + i$; $x_2 = -\frac{1}{2} - i$

57. $9x^2 - 12x + 8 = 0$ R: $x_1 = \frac{2 + 2i}{3}$; $x_2 = \frac{2 - 2i}{3}$

58. $4x^2 + 16x + 17 = 0$ R: $x_1 = -2 + \frac{1}{2}i$; $x_2 = -2 - \frac{1}{2}i$

59. $4x^2 - 16x + 25 = 0$ R: $x_1 = 2 + \frac{3}{2}i$; $x_2 = 2 - \frac{3}{2}i$

60. $25x^2 + 20x + 29 = 0$ R: $x_1 = -\frac{2}{5} + i$; $x_2 = -\frac{2}{5} - i$

61 $4x^2 - 4x + 3 = 0$ R: $x_1 = \frac{1 + i\sqrt{2}}{2}$; $x_2 = \frac{1 - i\sqrt{2}}{2}$

62. $9x^2 - 12x + 7 = 0$ R: $x_1 = \frac{2 + i\sqrt{3}}{3}$; $x_2 = \frac{2 - i\sqrt{3}}{3}$

63. $4x^2 + 2x + 1 = 0$ R: $x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{4}$; $x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{4}$

64. $2x^2 + 4x + 11 = 0$ R: $x_1 = \frac{-2 + 3i\sqrt{2}}{2}$; $x_2 = \frac{-2 - 3i\sqrt{2}}{2}$

65. $16x^2 - 24x + 29 = 0$ R: $x_1 = \frac{3 \pm 2i\sqrt{5}}{4}$; $x_2 = \frac{3 - 2i\sqrt{5}}{4}$

Ecuaciones literales

66. $a^2b^2x^2 - 2a^3bx + a^4 + b^4 = 0$ R: $x_1 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}i$; $x_2 = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}i$

67. $b^2x - 2b^2x + a^2 + b^2 = 0$ R: $x_1 = 1 + \frac{a}{b}i$; $x_2 = 1 - \frac{a}{b}i$

68. $(a^2 - b^2)^2x^2 - 2(a^2 - b^2)(a + b)x + 2(a^2 + b^2) = 0$

R: $x_1 = \frac{1}{a - b} + \frac{1}{a + b}i$; $x_2 = \frac{1}{a - b} - \frac{1}{a + b}i$

69. $(a - b)^2x^2 - 2a(a - b)x + a^2 + b^2 = 0$ R: $x_1 = \frac{a + bi}{a - b}$; $x_2 = \frac{a - bi}{a - b}$.

70. $4x^2 - 4ax + a^2 + b^2 = 0$ R: $x_1 = \frac{a + bi}{2}$; $x_2 = \frac{a - bi}{2}$

71. $abx^2 - (a + b)x + 1 = 0$ R: $x_1 = \frac{1}{b}$; $x_2 = \frac{1}{a}$

72. $(a^2 - b^2)x^2 - 2ax + 1 = 0$ R: $x_1 = \frac{1}{a - b}$; $x_2 = \frac{1}{a + b}$

73. $2ax^2 - (a - 4)x - 2 = 0$ R: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{2}{a}$

74. $abx^2 - (4b - 3a)x - 12 = 0$ R: $x_1 = \frac{4}{a}$; $x_2 = -\frac{3}{b}$

75. $(a^2 - b^2)x^2 - 2a^2bx + a^2b^2 = 0$ R: $x_1 = \frac{ab}{a - b}$; $x_2 = \frac{ab}{a + b}$

76. $12abx^2 - (16a^2 - 9b^2)x - 12ab = 0$ R: $x_1 = \frac{4a}{3b}$; $x_2 = -\frac{3b}{4a}$

77. $abcx^2 - (a^2b^2 + c^2)x + abc = 0$ R: $x_1 = \frac{ab}{c}$; $x_2 = \frac{c}{ab}$

78. $a^2x^2 - 2a^3x + a^4 - 1 = 0$ R: $x_1 = a + \frac{1}{a}$; $x_2 = a - \frac{1}{a}$

79. $c^2x^2 - 2acx + a^2 - b^2 = 0$ R: $x_1 = \frac{a+b}{c}$; $x_2 = \frac{a-b}{c}$

80. $c^2x^2 + (ac - bc)x - ab = 0$ R: $x_1 = \frac{b}{c}$; $x_2 = -\frac{a}{c}$

81. $2abx^2 - (4a^2 - b^2)x - 2ab = 0$ R: $x_1 = \frac{2a}{b}$; $x_2 = -\frac{b}{2a}$

82. $6mhx^2 - (4h^2 + 9m^2)x + 6mh = 0$ R: $x_1 = \frac{2h}{3m}$; $x_2 = \frac{3m}{2h}$

83. $(a+b)^2x^2 - (a+b)^2x + ab = 0$ R: $x_1 = \frac{a}{a+b}$; $x_2 = \frac{b}{a+b}$

84. $(a^2 - b^2)x^2 - 2(a^2 + b^2)x + a^2 - b^2 = 0$ R: $x_1 = \frac{a+b}{a-b}$; $x_2 = \frac{a-b}{a+b}$

85. $b^2x^2 - 2ab(1 - 2b)x - 8a^2 = 0$ R: $x_1 = \frac{2a}{b^2}$; $x_2 = -\frac{4a}{b}$

86. $a^2x^2 - 2a^3x + a^4 - b^2 = 0$ R: $x_1 = a + \frac{b}{a}$; $x_2 = a - \frac{b}{a}$

87. $abx^2 - (a+b)^2x + (a+b)^2 = 0$ R: $x_1 = 1 + \frac{a}{b}$; $x_2 = 1 + \frac{b}{a}$

88. $abx^2 - (a-b)^2x - (a-b)^2 = 0$ R: $x_1 = \frac{a}{b} - 1$; $x_2 = \frac{b}{a} - 1$

89. $ax^2 - (a+1)^2x + (a+1)^2 = 0$ R: $x_1 = a + 1$; $x_2 = 1 + \frac{1}{a}$

90. $ax^2 - (a-1)^2x - (a-1)^2 = 0$ R: $x_1 = a - 1$; $x_2 = \frac{1}{a} - 1$

Ecuaciones fraccionarias.

91. $2x - \frac{1}{x} = x + \frac{35}{6}$ R: $x_1 = 6$; $x_2 = -\frac{1}{6}$

92. $\frac{9}{x} - \frac{x}{3} = 2$ R: $x_1 = 3$; $x_2 = -9$

93. $x + \frac{1}{x-3} = 5$ R: $x_1 = x_2 = 4$

94. $\frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{10}{3}$ R: $x_1 = 10$; $x_2 = -10$

95. $\frac{7}{x-2} + \frac{8}{x-5} = 3$ R: $x_1 = 9$; $x_2 = 3$

96. $\frac{15}{x} - \frac{72 - 6x}{2x^2} = 2$ R: $x_1 = 6$; $x_2 = 3$

97. $\frac{3x-2}{x-1} - \frac{2x-1}{x+1} = 0$ R: $x_1 = -2 + \sqrt{7}$; $x_2 = -2 - \sqrt{7}$

98. $\frac{x+8}{x-8} - 2 = \frac{24}{x-4}$ R: $x_1 = 12$; $x_2 = -8$

99. $\frac{x}{x+60} = \frac{7}{3x-5}$ R: $x_1 = 14$; $x_2 = -10$

100. $\frac{x+11}{x} = 7 - \frac{9+4x}{x^2}$ R: $x_1 = 3$; $x_2 = -\frac{1}{2}$

101. $\frac{x+4}{3} - \frac{7-x}{x-3} = \frac{4x+7}{9} - 1$ R: $x_1 = 21$; $x_2 = 5$

102. $\frac{1}{3x} = \frac{1-x}{x + \frac{1}{3}}$ R: $x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$

103. $\frac{x}{7} + \frac{21}{x+5} = \frac{47}{7}$ R: $x_1 = 44$; $x_2 = -2$

104. $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+4} = 1$ R: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$

105. $\frac{2x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x-2}$ R: $x_1 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$

106. $x + 2 - \frac{6}{x+2} = 1$ R: $x_1 = 1$; $x_2 = -4$

107. $\frac{5x+4}{5x-4} + \frac{5x-4}{5x+4} = \frac{13}{6}$ R: $x_1 = 4$; $x_2 = -4$

108. $\frac{x}{x-6} - \frac{1}{2} = \frac{x}{6} + \frac{x+6}{6-x}$ R: $x_1 = 18$; $x_2 = -3$

109. $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{2x+13}{x+1}$ R: $x_1 = \frac{6}{5}$; $x_2 = 5$

110. $x - 6 = -\dfrac{9}{x}$ R: $x_1 = x_2 = 3$

111. $\dfrac{x-2}{x+1} + \dfrac{x-3}{x-1} = 1$ R: $x_1 = 5$; $x_2 = 0$

112. $\dfrac{2x-3}{1-x} + \dfrac{4x+4}{x-1} = 1 + x$ R: $x_1 = 4$; $x_2 = -2$

113. $\dfrac{x-1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{x^2-6x+25}{(x+2)(x-1)}$ R: $x_1 = 2$; $x_2 = -10$

114. $\dfrac{2x-3}{x+2} - \dfrac{4x^2+5x-8}{x^2-4} = \dfrac{3x-1}{2-x}$ R: $x_1 = 4$; $x_2 = 3$

115. $\dfrac{x-6}{x+4} + \dfrac{x-3}{x+2} = \dfrac{13x-48}{x^2+6x+8}$ R: $x_1 = 6$; $x_2 = 2$

Reconstrucción de una ecuación dadas las raíces. — *Utilícense las soluciones de los ejercicios de 77 a 91 para reconstruir las ecuaciones resueltas en ellos.*

Hallar, sin resolver la ecuación, la otra raíz de:

1. $x^2 + 5x + 4 = 0$ sabiendo que $x_1 = -1$ R: $x_2 = -4$
2. $x^2 - 4x - 21 = 0$ » » $x_1 = 7$ R: $x_2 = -3$
3. $5x^2 + 15x - 50 = 0$ » » $x_1 = -5$ R: $x_2 = 2$
4. $x^2 - 3x + 2 = 0$ » » $x_1 = 1$ R: $x_2 = 2$
5. $x^2 - x - 12 = 0$ » » $x_1 = 4$ R: $x_2 = -3$
6. $x^2 - 6x - 7 = 0$ » » $x_1 = -1$ R: $x_2 = 7$
7. $x^2 - 18x + 77 = 0$ » » $x_1 = 7$ R: $x_2 = 11$
8. $4x^2 - 9x + 2 = 0$ » » $x_1 = 2$ R: $x_2 = \dfrac{1}{4}$
9. $36x^2 - 36x + 5 = 0$ » » $x_1 = \dfrac{5}{6}$ R: $x_2 = \dfrac{1}{6}$
10. $50x^2 - 85x + 21 = 0$ » » $x_1 = \dfrac{7}{5}$ R: $x_2 = \dfrac{3}{10}$

Solución: Siendo $x_1 : x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{21}{50}$ y $x_1 = \dfrac{7}{5}$ es $\dfrac{7}{5} \cdot x_2 = \dfrac{21}{50}$

luego $$x_2 = \frac{21}{50} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3}{10}$$

Hallar un número q tal que haga que una de las raíces de la ecuación:

11. $x^2 - 7x + q = 0$ sea $x_1 = 3$ R: $q = 12$
12. $x^2 + qx + 6 = 0$ » $x_1 = 1$ R: $q = -7$
13. $x^2 + 24x + q = 0$ » $x_1 = -1$ R: $q = 23$
14. $x^2 - 6x + q = 0$ » $x_1 = x_2$ R: $q = 9$
15. $x^2 + qx + 12 = 0$ » $x_1 = \dfrac{x_2}{3}$ R: $q = -8$
16. $x^2 + qx + 8 = 0$ » $x_1 = 2x_2$ R: $q = -6$
17. $8x^2 + qx + 27 = 0$ » $x_1 = x_2^2$ R: $q = -30$
18. $x^2 - 9x + q = 0$ » $x_1 = x_2 + 1$ R: $q = 20$
19. $9x^2 + qx + 2 = 0$ » $x_1 = \dfrac{x_2}{2}$ R: $q = -9$
20. $2x^2 + qx + 3 = 0$ » $x_1 = \dfrac{3x_2}{2}$ R: $q = \mp 5$

Solución: Siendo $x_1 + x_2 = -\dfrac{q}{2}$ y $x_1 = \dfrac{3x_2}{2}$ es $\dfrac{3x_2}{2} + x_2 = -\dfrac{q}{2}$

o sea $\dfrac{5x_2}{2} = -\dfrac{q}{2}$ $\therefore$ $q = -5x_2$ [1]

y como $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{3}{2}$ es $\dfrac{3x_2}{2} x_2 = \dfrac{3}{2}$ $\therefore$ $x^2 = 1$

luego $x_2 = \pm 1$ y por [1] $q = -5(\pm 1) = \mp 5$

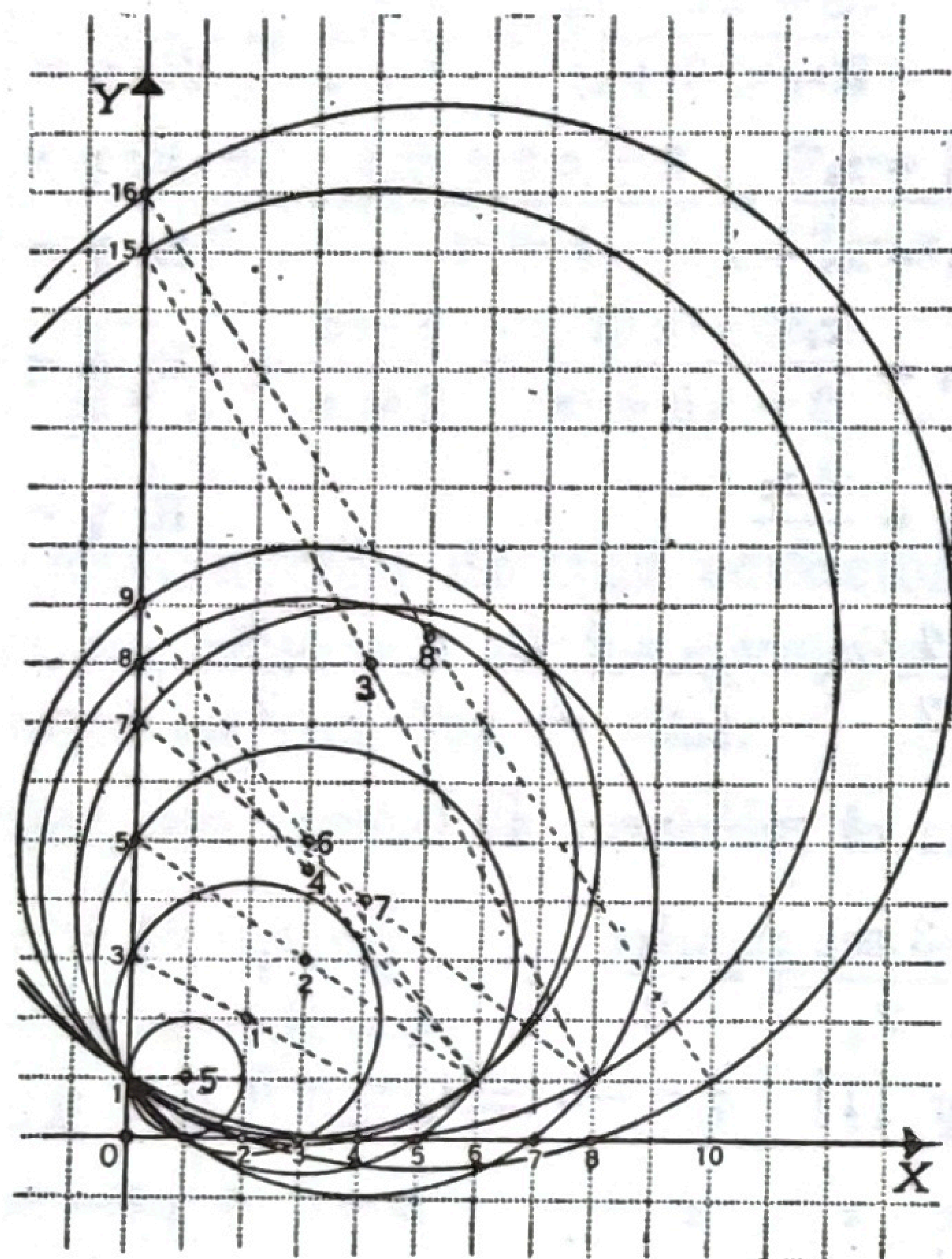
Hallar dos números tales que:

21. su producto sea 8 y su suma 6 R: $x_1 = 4$ y $x_2 = 2$
22. » » » 18 » » » -9 R: $x_1 = -3$ y $x_2 = -6$
23. » » » 1 » » » 2,5 R: $x_1 = 2$ y $x_2 = 0,5$
24. » » » 8 » » » -6 R: $x_1 = -2$ y $x_2 = -4$
25. » » » -15 » » » 2 R: $x_1 = 5$ y $x_2 = -3$
26. » » » 1 » » » a R: $x_1 = \dfrac{a + \sqrt{a^2-4}}{2}$ y $x_2 = \dfrac{a - \sqrt{a^2-4}}{2}$
27. » » » 9 » » » 0 R: $x_1 = 3i$ y $x_2 = -3i$
28. » » » a » » » 1 R: $x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{1-4a}}{2}$ y $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{1-4a}}{2}$

29. *su producto sea* 14 *y su suma* 6 R: $x_1 = 3 + 5i$ *y* $x_2 = 3 - 5i$

30. » » » 2 » » » -2 R: $x_1 = -1 + i$ *y* $x_2 = -1 - i$

Resolución gráfica de la ecuación de segundo grado con una incógnita. — *Las raíces de la ecuación reducida* $x^2 + bx + c = 0$ *son las abscisas de los puntos en los que la circunferencia cuyo diámetro tiene por extremos a los puntos de coordenadas* $(-b, 1)$ (*) *y* $(0 ; c)$ *corta al eje* OX (ARITMÉTICA Y ALGEBRA, *IV Curso*, págs. 152-155).



En la figura adjunta se han resuelto las ecuaciones Nos. **1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 y 8** de la página 102. Para resolver la primera ecuación, que es la

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

se trazó la circunferencia de centro **1** cuyo diámetro tiene por extremos a los puntos $(4 ; 1)$ y $(0 ; 3)$.

Como ella corta al eje OX en los puntos de abscisas $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$ estos números son las raíces de esa ecuación. En la misma forma se resolvieron las otras ecuaciones. El número que figura en el centro de cada circunferencia es el de la ecuación que se resuelve con ella.

Las circunferencias **5** y **6** que son *tangentes* al eje OX en los puntos 1 y 3, respectivamente, corresponden a las ecuaciones **5** y **6** que tienen *iguales* ambas raíces.

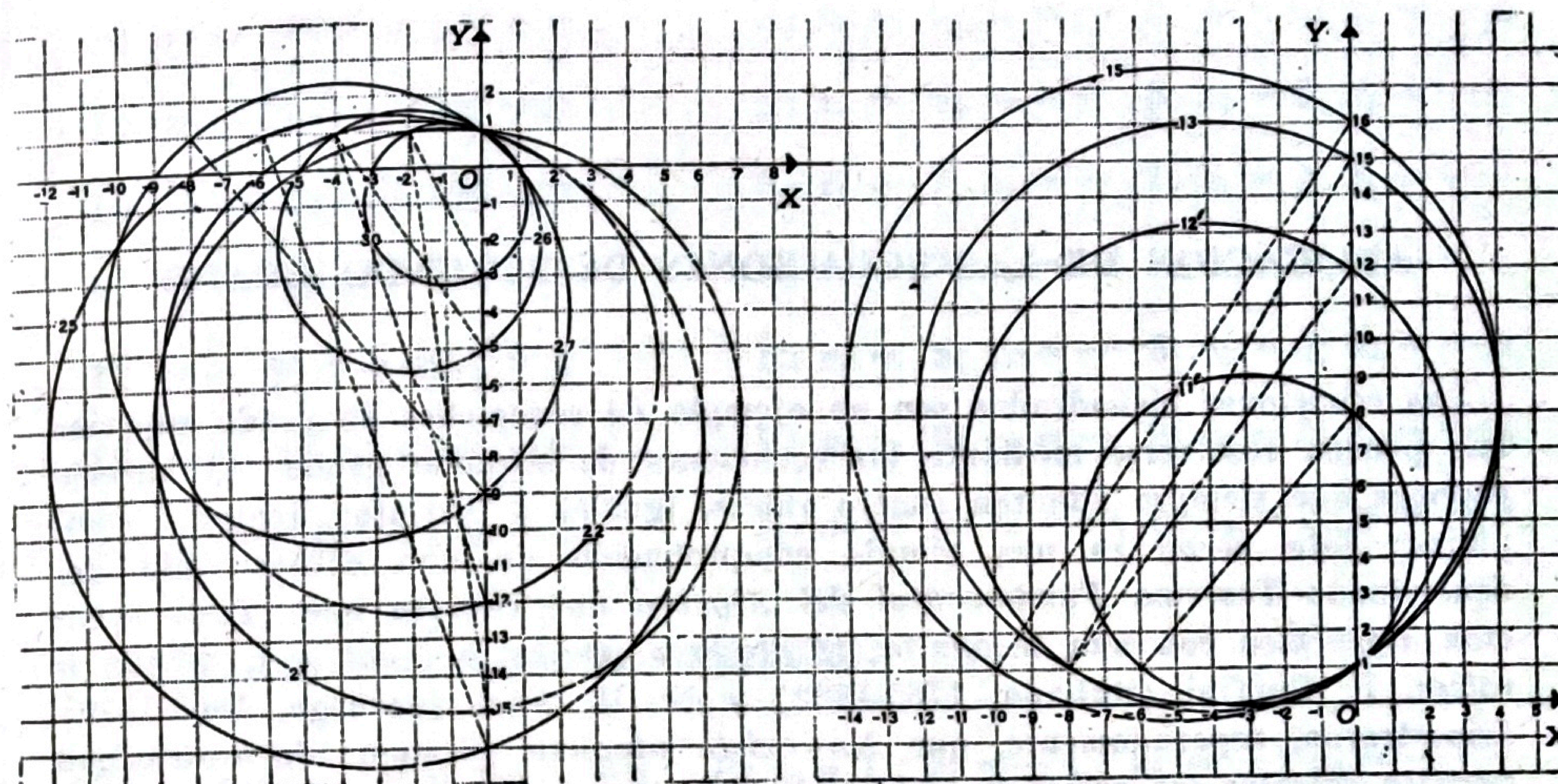
Las de la **5** son $x_1 = x_2 = 1$

y las de la **6** son $x_1 = x_2 = 3$

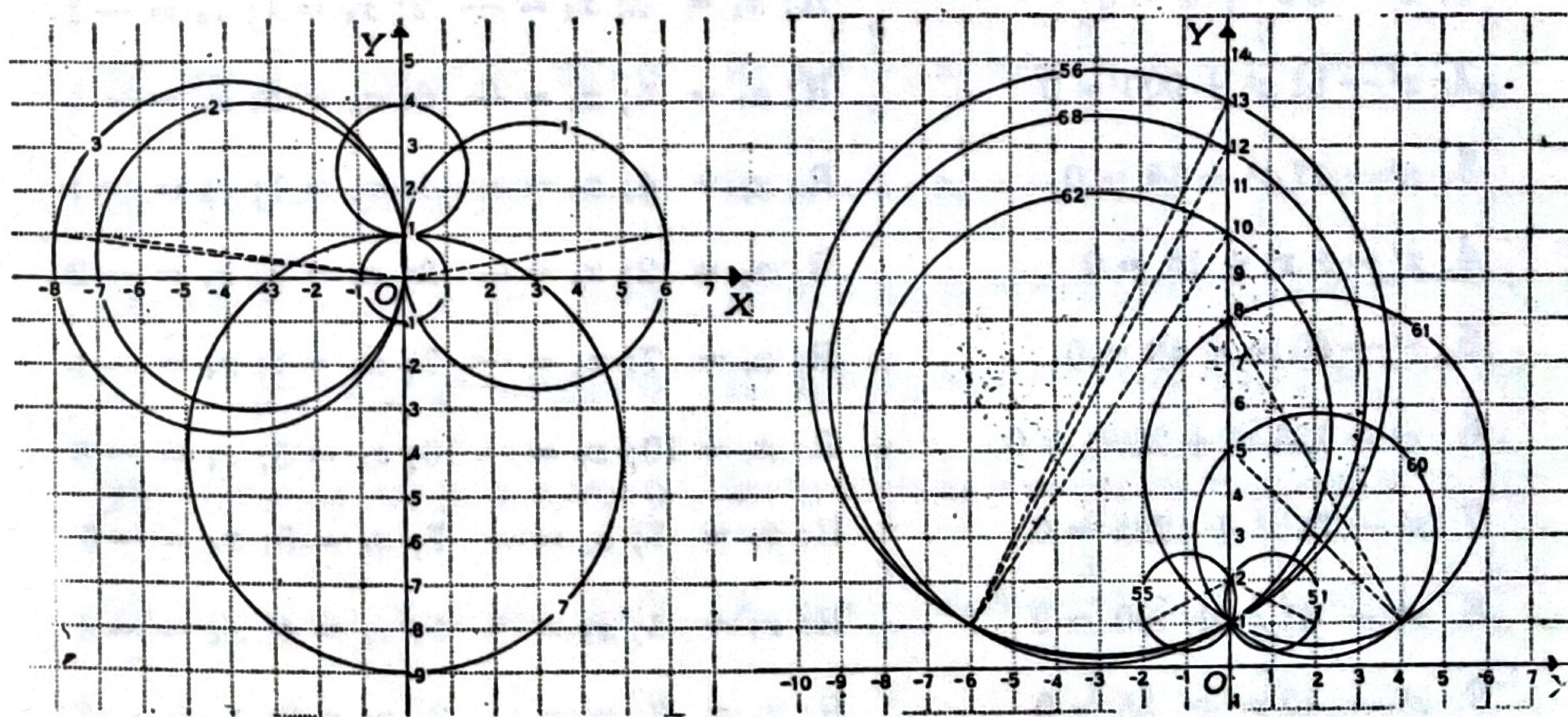
NOTA: En las pags. 252 a 254 se explica como pueden hallarse gráficamente las soluciones complejas imaginarias de una ecuación de segundo grado con una incógnita.

(*) Téngase presente que $-b$ significa: b cambiado de signo.

Las ecuaciones 11'; 12'; 13; 15; 21; 22; 25; 26; 27 y 30 de la página 113 se han resuelto con las circunferencias de la figura que sigue.



En la figura que sigue se han resuelto las ecuaciones 1; 2; 3 de la página 121, y las 7; 8 y 25 de la página 119, las 51; 55 y 56 de la página 114, y las 60; 61; 62 y 68 de la página 115.



Las circunferencias que *no cortan* al eje OX corresponden a ecuaciones cuyas raíces son *complejas imaginarias*. Por ejemplo las raíces de la ecuación 51 son $x_1 = 1 + i$ y $x_2 = 1 - i$ como resulta de la aplicación de la fórmula.

NOTA: Verifique el lector que a los mismos resultados anteriores se llega con la circunferencia cuyo diámetro tiene por extremos los puntos $(-b ; c)$ y $(0 ; 1)$.

APLICACION DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Las ecuaciones bicuadradas son un ejemplo de ecuaciones de grado superior que pueden resolverse mediante las ecuaciones de segundo grado. Al hacerlo veremos que siempre admiten cuatro raíces, iguales o distintas, reales o complejas. Este hecho es una simple comprobación de una consecuencia del denominado *Teorema Fundamental del Algebra* que expresa que: *Toda ecuación algebraica con una incógnita de grado n, mayor o igual a 1, admite n raíces.* P. Ruffini (italiano, 1765-1822) y N. H. Abel (noruego, 1802-1829) demostraron, separadamente, que *No existe ninguna fórmula algebraica que permita calcular las raíces de cualquier ecuación algebraica de grado superior al cuarto, en función de los coeficientes de esa ecuación.*

Ecuaciones bicuadradas. — *Ejercicios con raíces enteras:*

1. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ — R: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$

2. $x^4 - 61x^2 + 900 = 0$ — R: $x_1 = 6$; $x_2 = -6$; $x_3 = 5$; $x_4 = -5$

3. $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$ — R: $x_1 = 4$; $x_2 = -4$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$

4. $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ — R: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$; $x_4 = -2$

5. $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$ — R: $x_1 = 7$; $x_2 = -7$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$

6. $x^4 - 125x^2 + 2500 = 0$ — R: $x_1 = 10$; $x_2 = -10$; $x_3 = 5$; $x_4 = -5$

7. $x^4 - 74x^2 + 1225 = 0$ — R: $x_1 = 7$; $x_2 = -7$; $x_3 = 5$; $x_4 = -5$

8. $x^4 - 41x + 400 = 0$ — R: $x_1 = 5$; $x_2 = -5$; $x_3 = 4$; $x_4 = -4$

9. $x^4 - 13x' + 36 = 0$ — R: $x_1 = 3$; $x_2 = -3$; $x_3 = 2$; $x_4 = -2$

10. $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ — R: $x_1 = 4$; $x_2 = -4$; $x_3 = 2$; $x_4 = -2$

11. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ — R: $x_1 = 4$ $x_2 = -4$; $x_3 = 3$; $x_4 = -3$

12 $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ — R: $x_1 = 5$; $x_2 = -5$; $x_3 = 2$; $x_4 = -2$

13. $x^4 - 45x^2 + 324 = 0$ — R: $x_1 = 6$; $x_2 = -6$; $x_3 = 3$; $x_4 = -3$

14. $x^4 - 52x^2 + 576 = 0$ — R: $x_1 = 6$; $x_2 = -6$; $x_3 = 4$; $x_4 = -4$

15. $x^4 - 72x^2 + 1296 = 0$ — R: $x_1 = 6$; $x_2 = -6$; $x_3 = 6$; $x_4 = -6$

16. $x^4 - 53x^2 + 196 = 0$ — R: $x_1 = 7$; $x_2 = -7$; $x_3 = 2$; $x_4 = -2$

17. $x^4 - 65x^2 + 784 = 0$ — R: $x_1 = 7$; $x_2 = -7$; $x_3 = 4$; $x_4 = -4$

18 $x^4 - 89x^2 + 1600 = 0$ — R: $x_1 = 8$; $x_2 = -8$; $x_3 = 5$; $x_4 = -5$

19. $x^4 - 85x^2 + 324 = 0$ — P: $x_1 = 9$; $x_2 = -9$; $x_3 = 2$; $x_4 = -2$

20. $x^4 - 73x^2 + 576 = 0$ — R: $a_1 = 8$; $x_2 = -8$; $x_3 = 3$; $x_4 = -3$

Ejercicios con soluciones racionales:

21. $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ — R: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = \frac{1}{2}$; $x_4 = -\frac{1}{2}$

22. $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ — R: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = \frac{1}{3}$; $x_4 = -\frac{1}{3}$

23. $100x^4 - 29x^2 + 1 = 0$ — R: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = \frac{1}{5}$; $x_4 = -\frac{1}{5}$

24. $225x^4 - 181x^2 + 36 = 0$ — R: $x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = -\frac{2}{3}$; $x_3 = \frac{3}{5}$; $x_4 = -\frac{3}{5}$

25. $64x^4 - 257x^2 + 4 = 0$ — R: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = \frac{1}{8}$; $x_4 = -\frac{1}{8}$

26. $100x^4 - 901x^2 + 9 = 0$ — R: $x_1 = 3$; $x_2 = -3$; $x_3 = 0{,}1$; $x_4 = -0{,}1$

27. $x^4 - 4{,}01x^2 + 0{,}04 = 0$ — R: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = 0{,}1$; $x_4 = -0{,}1$

28. $10x^4 - 17x^2 + 0{,}16 = 0$ — R: $x_1 = \frac{2}{5}$; $x_2 = -\frac{2}{5}$; $x_3 = \frac{1}{10}$; $x_4 = -\frac{1}{10}$

29. $64x^4 - 52x^2 + 9 = 0$ — R: $x_1 = \frac{3}{4}$; $x_2 = -\frac{3}{4}$; $x_3 = \frac{1}{2}$; $x_4 = -\frac{1}{2}$

30. $2500x^4 - 625x^2 + 36 = 0$ — R: $x_1 = \frac{2}{5}$; $x_2 = -\frac{2}{5}$; $x_3 = \frac{3}{10}$; $x_4 = -\frac{3}{10}$

31 $36x^4 - 13x + 1 = 0$ — R: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = \frac{1}{3}$; $x_4 = -\frac{1}{3}$

32. $1024x^4 - 80x^2 + 1 = 0$ — R: $x_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = -\frac{1}{4}$; $x_3 = \frac{1}{8}$; $x_4 = -\frac{1}{8}$

33. $324x^4 - 369x^2 + 100 = 0$ R: $x_1 = \frac{5}{6}$; $x_2 = -\frac{5}{6}$; $x_3 = \frac{2}{3}$; $x_4 = -\frac{2}{3}$

34. $16x^4 - 73x^2 + 36 = 0$ R: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = \frac{3}{4}$; $x_4 = -\frac{3}{4}$

35. $196x^4 - 65x^2 + 4 = 0$ R: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = \frac{2}{7}$; $x_4 = -\frac{2}{7}$

36. $225x^4 - 61x^2 + 4 = 0$ R: $x_1 = \frac{2}{5}$; $x_2 = -\frac{2}{5}$; $x_3 = \frac{1}{3}$; $x_4 = -\frac{1}{3}$

37. $400x^4 - 41x^2 + 1 = 0$ R: $x = \frac{1}{4}$; $x_2 = -\frac{1}{4}$; $x_3 = \frac{1}{5}$; $x_4 = -\frac{1}{5}$

38. $81x^4 - 82x + 1 = 0$ R: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = \frac{1}{9}$; $x_4 = -\frac{1}{9}$

39. $256x^4 - 164x^2 + 25 = 0$ R: $x_1 = \frac{5}{8}$; $x_2 = -\frac{5}{8}$; $x_3 = \frac{1}{2}$; $x_4 = -\frac{1}{2}$

40. $144x^4 - 289x^2 + 100 = 0$ R: $x_1 = \frac{5}{4}$; $x_2 = -\frac{5}{4}$; $x_3 = \frac{2}{3}$; $x_4 = -\frac{2}{3}$

Ejercicios con raíces irracionales

41. $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ R: $x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = -\sqrt{3}$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$

42. $64x^4 - 60x^2 + 9 = 0$ R: $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}$; $x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

43. $x^4 - 12x^2 + 35 = 0$ R: $x_1 = \sqrt{7}$; $x_2 = -\sqrt{7}$; $x_3 = \sqrt{5}$; $x_4 = -\sqrt{5}$

44. $4x^4 - 11x^2 + 6 = 0$ R: $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$; $x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

45. $9x^4 - 32x^2 + 15 = 0$ R: $x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = -\sqrt{3}$; $x_3 = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $x_4 = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

46. $7x^4 - 50x^2 + 7 = 0$ R: $x_1 = \sqrt{7}$; $x_2 = -\sqrt{7}$; $x_3 = \frac{\sqrt{7}}{7}$; $x_4 = -\frac{\sqrt{7}}{7}$

47. $6x^4 - 37x^2 + 6 = 0$ R: $x_1 = \sqrt{6}$; $x_2 = -\sqrt{6}$; $x_3 = \frac{\sqrt{6}}{6}$; $x_4 = -\frac{\sqrt{6}}{6}$

48. $2x^4 - 11x^2 + 12 = 0$ R: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}$; $x_4 = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

49. $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ R: $x_1 = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$; $x_2 = -\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; $x_3 = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$; $x_4 = -\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

50. $(x^2-1)^2 - 4(x^2-1) + 3 = 0$ R: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = \sqrt{2}$; $x_4 = -\sqrt{2}$

Ejercicios con raíces complejas.

51. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ R: $x_1 = 3$; $x_2 = -3$; $x_3 = 2i$; $x_4 = -2i$

52. $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ R: $x_1 = 3$; $x_2 = -3$; $x_3 = i$; $x_4 = -i$

53. $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$ R: $x_1 = \frac{1}{2}i$; $x_2 = -\frac{1}{2}i$; $x_3 = 2i$; $x_4 = -2i$

54. $100x^4 + 21x^2 - 1 = 0$ R: $x_1 = 0{,}2$; $x_2 = -0{,}2$; $x_3 = 0{,}5i$; $x_4 = -0{,}5i$

55. $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$ R: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = i$; $x_4 = -i$

56. $x^4 + 6x^2 + 8 = 0$ R: $x_1 = 2i$; $x_2 = -2i$; $x_3 = i\sqrt{2}$; $x_4 = -i\sqrt{2}$

57. $x^4 + 6x^2 + 5 = 0$ R: $x = i\sqrt{5}$; $x_2 = -i\sqrt{5}$; $x_3 = i$; $x_4 = -i$

58. $x^4 - 21x^2 - 100 = 0$ R: $x_1 = 5$; $x_2 = -5$; $x_3 = 2i$; $x_4 = -2i$

59. $40x^4 + 71x^2 + 21 = 0$ R: $x_1 = i\frac{\sqrt{6}}{4}$; $x_2 = -i\frac{\sqrt{6}}{4}$; $x_3 = \frac{i\sqrt{35}}{5}$; $x_4 = -\frac{i\sqrt{35}}{5}$

60. $9x^4 - 32x^2 - 16 = 0$ R: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = \frac{2}{3}i$; $x_4 = -\frac{2}{3}i$

61. $4x^4 + 9x^2 + 2 = 0$ R: $x_1 = \frac{1}{2}i$; $x_2 = -\frac{1}{2}i$; $x_3 = i\sqrt{2}$; $x_4 = -i\sqrt{2}$

62. $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$ R: $x_1 = 3i$; $x_2 = -3i$; $x_3 = 2i$; $x_4 = -2i$

63. $9x^4 + 145x^2 + 16 = 0$ R: $x_1 = 4i$; $x_2 = -4i$; $x_3 = \frac{1}{3}i$; $x_4 = -\frac{1}{2}i$

64. $4x^4 + 11x^2 + 6 = 0$ R: $x_1 = i\sqrt{2}$; $x_2 = -i\sqrt{2}$; $x_3 = \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $x_4 = -\frac{i\sqrt{3}}{2}$

65. $x^4 + 12x^2 + 27 = 0$ R: $x_1 = 3i$; $x_2 = -3i$; $x_3 = i\sqrt{3}$; $x_4 = -i\sqrt{3}$

66. $x^4 + 42x^2 + 216 = 0$ R: $x_1 = 6i$; $x_2 = -6i$; $x_3 = i\sqrt{6}$; $x_4 = -i\sqrt{6}$

67. $9x^4+10x^2+1=0$ R: $x_1=i$; $x_2=-i$; $x_3=\frac{1}{3}i$; $x_4=-\frac{1}{3}i$

68. $x^4+45x^2-196=0$ R: $x_1=2$; $x_2=-2$; $x_3=7i$; $x_4=-7i$

69. $x^4+20x^2+96=0$ R: $x_1=2i\sqrt{2}$; $x_2=-2i\sqrt{2}$; $x_3=2i\sqrt{3}$; $x_4=-2i\sqrt{3}$

70. $x^4+22x^2+72=0$ R: $x_1=2i$; $x_2=-2i$; $x_3=3i\sqrt{2}$; $x_4=-3i\sqrt{2}$

Ejercicios con raíces literales.

71. $x^4-(a^2+b^2)x+a^2b^2=0$ R: $x_1=a$; $x_2=-a$; $x_3=b$; $x_4=-b$

72. $x^4-(c^2+4)x+4c^2=0$ R: $x_1=2$; $x_2=-2$; $x_3=c$; $x_4=-c$

73. $x^4-(4a^2+9b^2)x+36a^2b^2=0$ R: $x_1=2a$; $x_2=-2a$; $x_3=3b$; $x_4=-3b$

74. $x^4-(2a^2+3b^2)x+6a^2b^2=0$ R: $x_1=a\sqrt{2}$; $x_2=-a\sqrt{2}$; $x_3=b\sqrt{3}$; $x_4=-b\sqrt{3}$

75. $x^4-29m^2x+100m^4=0$ R: $x_1=2m$; $x_2=-2m$; $x_3=5m$; $x_4=-5m$

76. $x^4-7n^2x+10n^4=0$ R: $x_1=n\sqrt{5}$; $x_2=-n\sqrt{5}$; $x_3=n\sqrt{2}$; $x_4=-n\sqrt{2}$

77. $a^2b^2x^4-(a^2+b^2)x^2+1=0$ R: $x_1=\frac{1}{a}$; $x_2=\frac{1}{a}$; $x_3=\frac{1}{b}$; $x_4=-\frac{1}{b}$

78. $b^2x^4-(a^4b^2+1)x^2+a^4=0$ R: $x_1=a^2$; $x_2=-a^2$; $x_3=\frac{1}{b}$; $x_4=-\frac{1}{b}$

79. $x_4-2(a^2+b^2)x^2+(a^2-b^2)^2=0$ R: $x_1=a+b$; $x_2=-(a+b)$; $x_3=a-b$; $x_4=b-a$

80. $(a^2-b^2)^2x^4-2(a^2+b^2)x^2+1=0$ R: $x_1=\frac{1}{a+b}$; $x_2=-\frac{1}{a+b}$; $x_3=\frac{1}{a-b}$; $x_4=\frac{1}{b-a}$

Ejercicios con ecuaciones fraccionarias y con operaciones indicadas

81. $\frac{1}{x^4}-\frac{5}{x^2}+4=0$ R: $x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=\frac{1}{2}$; $x_4=-\frac{1}{2}$

82. $\frac{1}{5x^4}-\frac{2}{x^2}+\frac{9}{5}=0$ R: $x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=\frac{1}{3}$; $x_4=-\frac{1}{3}$

83. $\frac{1}{x^4}-\frac{1}{4x^2}=\frac{1}{9x^2}-\frac{1}{36}$ R: $x_1=3$; $x_2=-3$; $x_3=2$; $x_4=-2$

84. $\frac{36}{x^4}-\frac{9}{x^2}=\frac{16}{x^2}-4$ R: $x_1=2$; $x_2=-2$; $x_3=\frac{3}{2}$; $x_4=-\frac{3}{2}$

85. $\frac{1}{x^4}+\frac{4}{x^2}+\frac{9}{x^2}+36=0$ R: $x_1=\frac{i}{3}$; $x_2=-\frac{i}{3}$; $x_3=\frac{i}{2}$; $x_4=-\frac{i}{2}$

• 86. $(x^2-13x)^2+24(x^2-13x)-432=0$ R: $x_1=\frac{13+\sqrt{217}}{2}$; $x_2=\frac{13-\sqrt{217}}{2}$
$x_3=4$; $x_4=9$

87. $(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24=0$ R: $x_1=3$; $x_2=2$; $x_3=4$; $x_4=1$

88. $3\left(\frac{1}{3}x^2-3x\right)^2+32\left(\frac{1}{3}x^2-3x\right)+84=0$ R: $x_1=6$; $x_2=3$; $x_3=7$; $x_4=2$

89. $(x^2-8x)^2+31(x^2-8x)+240=0$ R: $x_1=5$; $x_2=3$; $x_3=4$; $x_4=4$

90. $(x^2-12x)^2+67(x^2-12x)+1120=0$ R: $x_1=7$; $x_2=5$; $x_3=8$; $x_4=4$

Ejercicios con exponenciales y logaritmos:

91. $5^x \cdot\cdot\, 5^{\frac{6}{x}}=5^{2,5\,x}$ R: $x_1=2$, $x_2=-2$

Solución: Efectuando el producto de potencias de igual base indicado en el primer miembro, da:

$$5^{x+\frac{6}{x}}=5^{2,5\,x} \quad\therefore\quad x+\frac{6}{x}=2,5\,x \quad\therefore\quad x^2+6=2,5\,x^2 \quad\therefore\quad -1,5\,x^2=-6$$

luego $x^2=\frac{-6}{-1,5}=4 \quad\therefore\quad x=\pm\sqrt{4} \quad\therefore\quad x_1=2$ y $x_2=-2$

92. $2^x-2^{-x}=3(1+2^{-x})$ R: $x_1=2$, x_2 solución extraña

• En las ecuaciones 86 y 90 conviene tomar como incógnita a la expresión contenida en cada paréntesis.

93. $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$ R: $x_1 = 2$, x_2 solución extraña

94. $64 \cdot 4^{-x} + 4^{x+1} = 257$ R; $x_1 = 3$, $x_2 = -1$

95. $9^x - 6 \cdot 9^{-x} = 1$ R: $x_1 = \frac{1}{2}$, x_2 solución extraña

96. $x^{\log x} = 100\,x$

Solución: Tomando logaritmos de ambos miembros da

$\log x \cdot \log x = \log 100 + \log x$ por prop. unif., log. de una pot. y de un prod.

o sea $(\log x)^2 = 2 + \log x$ por def. de pot. y ser $\log 100 = 2$ por def.

luego

$(\log x)^2 - \log x - 2 = 0$ y resolviendo esta ecuación de 2° grado en $\log x$

$$\log x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \therefore \quad x_1 = 2 \quad y \quad x_2 = -1$$

Si $\log x = 2$ es $x = 10^2 = 100$ por def. de logaritmo

y si $\log x = -1$ es $x = 10^{-1} = 0{,}1$,, ,, ,, ,,

97. $x^{\log x} = 1000\,x^2$ R: $x_1 = 1000$, $x_2 = 0{,}1$

98. $\log_2 (x^2 + 2\,x) = 3$ R: $x_1 = 2$, $x_2 = -4$

99. $\log_6 (x+3) + \log_6 (x-2) = 1$ R: $x_1 = 3$, $x_2 = -4$ sol. extraña

100. $\begin{cases} 2^{x+y} = 4 \\ 2^{x+3} + 2^{y+3} = 40 \end{cases}$ R: $\begin{cases} x = 2 \ , \ y = 0 \\ x = 0 \ , \ y = 2 \end{cases}$

Solución: Siendo $4 = 2^2$ es $2^{x+y} = 2^2 \ \therefore \ x + y = 2 \ \therefore \ y = 2 - x$ [1]

Además $2^{x+3} + 2^{y+3} = 2^x \cdot 2^3 + 2^y \cdot 2^3 = 2^3 (2^x + 2^y) = 40$

de donde $2^x + 2^y = 5$ [2]

Reemplazando [1] en [2] da: $2^x + 2^{2-x} = 5$

o bien $2^x + \frac{2^2}{2^x} = 5 \quad \therefore \quad (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

Resolviendo esta ecuación: $2^x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Si $2^x = 4 = 2^2$ es $x = 2$ e $y = 2 - 2 = 0$

Si $2^x = 1 = 2^0$ es $x = 0$ e $y = 2 - 0 = 2$

PROBLEMAS DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA

El sencillo problema (Nº 19): ''*Descomponer al número 10 en dos partes tales que el producto de las mismas sea igual a 40*'' tiene un valor histórico considerable, porque al resolverlo Cardano, en 1545, fué el primero que se animó a operar con las raíces cuadradas de números negativos que figuran en las soluciones

$$x_1 = 5 + \sqrt{-15} \quad y \quad x_2 = 5 - \sqrt{-15}$$

que obtuvo para ese problema, en una época en que tales raíces se consideraban ''*imposibles*'', ''*absurdas*'' o ''*ficticias*''.

Cuestiones de aritmética.

1. *Hallar un número tal que el producto del mismo por su cuarta parte sea igual a 1764.* R: 84 y — 84

2. *¿Cuál es el número cuyo cuadrado más su triplo es igual a 40?* R: 5 y — 8

3. *¿Cuál es el número tal que la mitad de su cuadrado es igual al duplo del mismo más 6?* R: — 2 y 6

4. *¿Cuáles son los dos números naturales consecutivos cuyo producto es 812?* R: 28 y 29

5. *¿Cuál es el número natural cuyo cuadrado lo supera en 272?* R: 17

6. *Hallar el valor positivo de x que haga que el producto de $x - 3$ por $x + 3$ sea igual a 12 veces su diferencia.* R: $x = 9$

7. *Encontrar dos números cuya diferencia es 7 sabiendo que la diferencia de sus cubos es 1267.* R: 11 y 4 ; — 4 y — 11

8. *Hallar dos números impares consecutivos tales que su producto sea 255.* R: 15 y 17

9. *Hallar dos números pares consecutivos tales que su producto sea 7224.* R: 84 y 86

10. *Hallar tres números naturales consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 434.* R: 11, 12 y 13

11. *Hallar un número sabiendo que si se le aumenta y se le disminuye 8 el producto de los números así obtenidos es 161.* R: 15 y —15

12. *Hallar un número natural tal que si a sus dos tercios se le suma 6 y a sus cuatro séptimos se les restan 2 el producto de los números así obtenidos es 200.* R: 21

13. *Hallar un número sabiendo que el producto de su mitad por su tercera parte es 600.* R: 60 y —60

14. *¿Por cuál número es necesario dividir a 1880 para que el cociente sea igual a ese número y el resto sea 31?* R: 43 y —43

15. *Descomponer el número 392 en dos factores tales que la razón entre uno de ellos y el otro sea un medio.* R: 14 y 28 ; —14 y —28

16. *Descomponer el número 23 en dos partes tales que la suma de sus cuadrados sea 305.* R: 16 y 7

17. *Idem en dos partes tales que la diferencia entre el cuadrado de la mayor y el de la menor sea 161.* R: 15 y 8

18. *Descomponer el número 15 en dos partes tales que el cuadrado de una de ellas sea igual a veinte veces la otra parte.* R: 10 y 5 ; —30 y 45

19. *Descomponer el número 10 en dos partes tales que el producto de las mismas sea 40.* R: $5+i\sqrt{15}$ y $5-i\sqrt{5}$

20. *Descomponer el número 408 en dos partes tales que si a una de ellas se le resta 81 y a la otra 27 el producto de los números que así resultan es 20 000.* R: 281 y 127

21. *Descomponer el número 47 en dos partes tales que el cuadrado de una de ellas exceda al duplo de la otra en 5.* R: 9 y 38

22. *Hallar dos números sabiendo que su suma es 40 y la de sus cuadrados 850.* R: 25 y 15

23. *Hallar dos números sabiendo que su diferencia es 20 y la suma de sus cuadrados 1082.* R: 31 y 11

24. *Hallar dos números sabiendo que la suma de sus cuadrados es 458, y la diferencia de esos cuadrados es 120.* R: 17 y 13

25. *El número 87, escrito en el sistema de numeración decimal, ha sido representado por las cifras 223 en otro sistema en el que se emplean menos de diez cifras; ¿cuál es la base de ese sistema, es decir, con cuántas cifras diferentes puede representarse en él cualquier número natural?*

Solución. — Llamando x a la base buscada, resulta que el número 87 es la abreviación del polinomio $2x^2+2x+3$, luego

$$87 = 2x^2+2x+3 \quad \therefore \quad 2x^2+2x-84=0$$

ecuación de 2° grado cuyas raíces son $x_1 = 6$ y $x_2 = -7$; ésta última no es aceptable como solución del problema, pues la base de un sistema de numeración es un número natural.

26. *¿Cuál es la base del sistema de numeración en el cual el número 12, escrito en el sistema decimal, está representado por 110?* R: 3

27. *Idem si el número 6 está representado por 110?* R: 2

28. *Hallar un número de dos cifras, sabiendo que la suma de éstas es 13 y que si al producto de las mismas se le suma 58, se obtiene el primer número con las cifras invertidas.* R: 49

29. *Hallar un número de dos cifras sabiendo que la de las decenas es el doble de la de las unidades y que la suma de los cuadrados de esas cifras es inferior en 1 a la mitad del número.* R: 42

30. *¿Cuál es el número de dos cifras en el cual la cifra de las decenas es el triplo de la de las unidades y es tal que si se invierten esas cifras y se multiplica el número así obtenido por el primero, el producto es 403?* R: 31

31. *Hallar un número de dos cifras sabiendo que la suma de ellas es 10 y que si al producto de las mismas se le suma 16 se obtiene el primer número con las cifras invertidas.* R: 73

Problemas de porcentaje e interés. — 32. *Hallar el costo de un objeto sabiendo que al venderlo por 11 $ se gana un tanto por ciento igual a dicho costo.*

Solución.— Llamando x al costo del objeto, el x % de ese costo es $\frac{x \cdot x}{100}$

luego $x + \frac{x^2}{100} = 11$ R: $x_1 = 10$ \$; $x_2 = -110$ no es aceptable

33. *Hallar el costo de un objeto sabiendo que al venderlo por 24 $ se gana un ntta. por ciento igual a dicho costo.* R: 20 $

34. *Idem sabiendo que al venderlo por 9 $ se pierde un tanto por ciento igual a dicho costo.* R: 10 $

35. *Idem sabiendo que al venderlo por 12 $ se gana un tanto por ciento igual al doble de dicho costo.* R: 10 $

36. *Idem sabiendo que al venderlo por 3 $ se pierde un tanto por ciento igual al triplo de ese costo.* R: 30 $ ó $\frac{10}{3}$ $

37. *Una persona colocó a interés simple 1200 $. Al cabo de un trimestre volvió a colocar a interés simple, y a la misma tasa, ese capital más los intereses producidos en ese trimestre, y obtuvo al finalizar el segundo trimestre 18,27 $ de interés. ¿A qué tanto por ciento anual colocó el capital?* R: el 6 %

38. *Una persona prestó a interés 2000 $ por 180 días. Al cabo de ese tiempo sacó de los intereses 30 $ y volvió a prestar el capital primitivo más el resto de los intereses por 90 días y a la misma tasa de interés. ¿Cuál fué esa tasa si al cabo de ese tiempo le devolvieron 2025,25 $ como pago del capital e intereses?* R: 5 %

39. *Una persona prestó, a una cierta tasa, 720 $ por 60 días. Al cabo de ese tiempo volvió a prestar, a la misma tasa, la suma anterior, más los intereses devengados y más 360 $, por 60 días más. Si al cabo de ese tiempo le entregaron 12,698 $ en concepto de intereses, ¿cuál fué la tasa?* R: 7 %

Problemas que conducen a ecuaciones fraccionarias. — 40. *Hallar el denominador de una fracción sabiendo que su numerador es 3 y que disminuye 1 si se le suma 4 a su denominador.* R: 2 y — 6

41. *Idem sabiendo que el numerador es 7 y que aumenta $\frac{3}{10}$ si se le resta 3 a ese denominador.* R: 10 y — 7

42. *Descomponer al número 36 en dos partes tales que la razón entre los cuadrados de las mismas sea un veinticinco avo.* R: 6 y 30 ; — 9 y 45

43. *¿Cuál es el número que sumado a su recíproco da $2\frac{1}{6}$?* R: $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$

44. *Un andarín hizo 36 km en un cierto número de horas. Si hubiese marchado a 1 km más por hora, hubiera tardado 3 horas menos en recorrer la distancia. ¿Cuántos kilómetros por hora hacía?*

Solución. — Llamando x al número de kilómetros por hora que hacía el andarín, es $\frac{36}{x}$ el número de horas que tardaba en recorrer los 36 km, y si aumenta un kilómetro por hora su velocidad, emplea $\frac{36}{x+1}$ horas en recorrer los 36 km, y como ese tiempo es inferior en 3 horas al anterior, resulta:

$$\frac{36}{x} = \frac{36}{x+1} + 3 \therefore x_1 = 3$$

45. *Hallar las velocidades de un tren rápido y otro ordinario, sabiendo que la velocidad del primero es de 25 km/h mayor que la del segundo y que el tren rápido emplea 5 h menos que el otro para recorrer 630 km.* R: 70 km/h y 45 km/h

46. *Hallar las velocidades de dos andarines sabiendo que parten juntos para recorrer una distancia de 30 km, y que uno de ellos que recorre un kilómetro por hora más que el otro, llega a destino 1 hora antes que ese otro.* R: 6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ y 5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$

47. *Hallar el tiempo que tardan dos ciclistas en recorrer la distancia de 120 km sabiendo que uno de ellos que recorre 1 km por hora más que el otro, tarda 12 minutos menos que ese otro en recorrer la mencionada distancia.* (Téngase presente que 12 min = 0,2 h) R: 4 h 48 min y 5 h

48. *Hallar la velocidad con que camina una persona, sabiendo que necesitaría 4 horas menos que las que emplea para recorrer 30 km, si aumentara su velocidad en 10 km por hora.* R: 5 km/h

49. *Una persona compró cierto número de objetos por 100 $ y podría haber comprado, por esa misma suma, 5 objetos más si cada uno costara 1 $ menos. ¿Cuántos objetos compró?* R: 20 objetos

50. *Una persona compró un cierto número de corbatas por 600 $, y por esa misma suma hubiese podido comprar 5 corbatas más si cada una hubiese costado 20 $ menos. ¿Cuántas corbatas compró?* R: 10 corbatas

51. *Una persona de 52 años de edad tiene un nieto de 2 años. ¿Después de cuántos años la razón entre la edad del abuelo y la del nieto, será igual a los tres cuartos del tiempo transcurrido para que eso suceda?* R: 8 años

52. *Dos andarines parten al mismo tiempo para llegar a una ciudad distante 126 km del punto de partida. Uno de ellos, que camina un kilómetro por hora más que el otro, ha llegado a destino tres horas antes que ese otro. ¿Cuál es el tiempo empleado por cada uno de ellos, y cuáles sus velocidades?*

R: 7 km/h y 18 h; 6 km/h y 21

Sobre progresiones.

53. *Una persona parte de un cierto punto y recorre 15 km el primer día, 20 km el segundo, 25 km el tercero y así sucesivamente. En el mismo instante y desde el mismo lugar parte otra persona que recorre diariamente 20 km en la misma dirección y sentido que la primera. Al cabo de cuántos días esta última persona encuentra a la segunda y a qué distancia del punto de partida?*

R.: 3 días; 60 km

53'. *Idem si la segunda persona parte 2 días después.*

R.: La segunda persona no alcanza a la primera.

53''. *Idem si la segunda persona hubiese partido 5 días antes que la primera.*

R.: 8 días; 260 km

Solución del segundo problema. — Si llamamos x al número de días buscados, la segunda persona emplea $x-2$ días en alcanzar a la primera que recorre distancias que forman una progresión aritmética cuyo primer término es 15 y la razón es 5, luego la suma de los recorridos hechos por la primera persona

en x días es
$$\frac{15+15+(x-1).5}{2}.x=\frac{25x+5x^2}{2}$$

Como la segunda persona recorre diariamente 20 km en $x-2$ días recorre $20(x-2)$ km y este recorrido debe ser igual al de la primera persona, se tiene

$$\frac{25x+5x^2}{2}=20(x-2)$$

efectuando operaciones y trasponiendo términos, da

$$5x^2-15x+80=0 \quad .\dot{.}. \quad x^2-3x+16=0$$

resolviéndola, se tiene

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-4.16}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-55}}{2}$$

las raíces complejas imaginarias de esta ecuación nos indican que la segunda persona *no alcanza* a la primera.

54. *Un niño que tiene 120 bolitas las quiere disponer en varias filas y formar con ellas un triángulo, colocando en la primera fila 1 bolita, en la segunda 2, en la tercera 3, y así sucesivamente. ¿Cuántas filas logrará formar?*

R.: 15

55 *¿Cuántos términos hay que sumar en la progresión 15, 10, 5... para obtener como resultado — 150?*

R: 12

55'. *Calcular los lados de un triángulo rectángulo BAC sabiendo que están en progresión aritmética, y que el menor de ellos es de 9 cm.*

R: $a = 15$ cm; $b = 12$ cm; $c = 9$ cm

55''. *Hallar el primer término y la razón de una progresión aritmética sabiendo que la suma del segundo término con el séptimo es 35 y que el producto de los mismos es 250.*

R: $a = 7$; $r = 3$ ó $a = 28$ y $r = -3$

55'''. *Un señor compró un terreno por 3775 \$ pagando 1/3 \$ por el primer metro cuadrado, 2/3 \$ por el segundo, y así sucesivamente. ¿Cuál es la superficie de este terreno?*

R: 150 m^2

55''''. *Una persona que debe 16000 \$ conviene en pagar 2500 \$ el primer mes, 2300 \$ el segundo y 2000 \$ menos cada mes hasta saldar la deuda. ¿Al cabo de cuántos meses lo consigue?*

R: 10 meses

Aplicaciones a la Geometría. — Sobre el teorema de Pitágoras. —

56. *Un rectángulo tiene 8 cm de base y 15 cm de altura. ¿En cuánto habrá que disminuir a la base y a la altura para que su diagonal disminuya 4 cm?* R: 3 cm

57. *Los catetos de un triángulo rectángulo tienen 10 cm y 24 cm, respectivamente. ¿En cuánto habrá que aumentarlos para que su hipotenusa aumente 8 cm?* R: 6 cm

58. *Hallar las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que están expresadas en centímetros por tres números consecutivos.*

R: 3 cm; 4 cm y 5 cm

59. *Hallar las longitudes de las aristas de un paralelepípedo rectángulo sabiendo que están expresadas en centímetros por tres números consecutivos y que la diagonal del mismo es de $5\sqrt{2}$ cm.* R: 3 cm, 4 cm y 5 cm

60. *Hallar la base y la altura de un rectángulo sabiendo que su diagonal es de 50 m y que la base es 10 m más larga que la altura.* R: $b = 40$ m y $h = 30$ m

61. *Calcular el radio de un círculo sabiendo que la flecha correspondiente a una cuerda de 18 cm es de 3 cm.* R: 15 cm

62. *El largo de una caja supera al ancho en 5 cm, y la altura es 3 cm menor que ese ancho. La superficie de las paredes laterales supera a la suma de la superficie del fondo y de la tapa en 240 cm. ¿Cuáles son las longitudes del largo, del ancho y del alto de la caja?* R: 20 cm, 15 cm y 12 cm

63. *Calcular el lado de un rombo sabiendo que su superficie es de 96 cm² y que la razón entre sus diagonales es tres cuartos.* R: 10 cm

64. *Hallar el radio de un círculo sabiendo que la distancia entre dos cuerdas paralelas, iguales a los ocho quintos de ese radio, es de 60 cm.* R: 50 cm

65. *Calcular la base y la altura de un triángulo isósceles sabiendo que la segunda supera a la primera en 2 cm y que los lados iguales son de 13 cm.*
R: 10 cm y 12 cm

66. *Calcular la generatriz, la altura y el radio de la base de un cono sabiendo que primera supera al radio en 8 cm y que la segunda lo supera en 7 cm.*
R: 13 cm, 12 cm y 5 cm

67. *Dos móviles parten simultáneamente del vértice de un ángulo recto y recorren sus lados con movimiento uniforme, uno con una velocidad de 1,5 m/seg y el otro con velocidad de 2 m/seg. Se desea saber al cabo de cuánto tiempo se hallarán separados de una distancia de 500 m.*
R: 3 *min.* 20 *seg*

68. *En un círculo de 13 m de radio al trazar una cuerda perpendicular a uno de sus diámetros, resulta que la distancia del centro del círculo a dicha cuerda excede en 7 m a la mitad de la cuerda. Calcular esa distancia y la longitud de la cuerda.* R: 12 m y 10 m

Sobre superficies:

69. *Calcular la base y la altura de un triángulo sabiendo que la primera es 4 m mayor que la segunda y que la superficie del triángulo es de 16 m².*
R: $b = 8\,m$ y $h = 4\,m$

70. *Calcular las longitudes de las bases de un trapecio sabiendo que su superficie es de 45 m², que una de las bases es el doble de la altura y la otra 17 m más larga que la altura.* R: $b = \frac{61}{3}$ m y $b' = \frac{20}{3}$ m.

71. *Calcular las longitudes de la base y de la altura de un rectángulo sabiendo que la primera supera a la segunda en un metro y que la superficie del rectángulo es de 10100 m².* R: $b = 101$ m , $h = 100$ m

72. *El largo de un salón rectangular es 4 m mayor que el ancho del mismo. Una alfombra, colocada en el centro del salón, deja sin cubrir una superficie de 2 m de ancho comprendida entre la alfombra y la pared. Esa superficie es igual a la cubierta por la alfombra. ¿Cuáles son las dimensiones del salón?* R: $l = 16$ m; $a = 12$ m

73. *Una hoja de cartón de forma rectangular tiene 72 cm de largo y 48 cm de ancho. Se desea cortar un margen alrededor de la misma, de ancho constante, de manera que la hoja rectangular que queda tenga una superficie igual a cinco octavos de la hoja dada. ¿Qué ancho debe tener ese margen?* R: 6 cm

74. *Hallar los radios de dos círculos sabiendo que el diámetro de uno es 4 cm más largo que el del otro y que la suma de las superficies de ambos círculos es de* $\frac{748}{7}$ *cm².* *Tómese* $\pi \cong \frac{22}{7}$ R: 3 cm y 5 cm

75. *¿En cuánto deben aumentarse los lados de un rectángulo de 80 cm de largo por 60 cm de ancho para que su superficie aumente en 725 cm²?* R: 5 cm

76. *Calcular el radio de un cilindro de 40 cm de altura sabiendo que su superficie total es de 3140 cm². Tomese* $\pi = 3{,}14$. R: 10 cm

77. *Calcular el radio de un cono de 50 cm de generatriz sabiendo que su superficie total es de 4396 cm². Tómese* $\pi = 3{,}14$. R: 20 cm

78. *Si a un sector circular de radio r se lo hace girar alrededor de la bisectriz de su ángulo central, engendra, después de un giro completo, la superficie de un sector esférico. Calcular el radio de la base del cono correspondiente al mismo, sabiendo que su superficie lateral es igual a la superficie del casquete perteneciente al sector esférico.*
R: $\frac{4}{5}r$

79. *Calcular el radio de una esfera sabiendo que un plano que dista 10 cm de su centro, es tal que la superficie del menor de los casquetes que él determina es la mitad de la del mayor.* R: 30 cm

Sobre volúmenes:

80. *Hallar las longitudes de las aristas de dos cubos sabiendo que ellas difieren en 2 cm y sus volúmenes en 98 cm³.* R: 3 cm y 5 cm

81. *Con una hoja de cartón de forma cuadrada se quiere construir una caja sin tapa, para lo cual se sacan de cada ángulo de dicha hoja un cuadrado de 2,5 cm de lado. Calcular la longitud del lado de la hoja sabiendo que la caja construida tiene un volumen de 90 cm³.* R: $x = 11$ cm

82. *Idem sabiendo que el volumen de la caja resultante es de 180 cm³ y su profundidad de 5 cm.* R: 16 cm

83. *Calcular las dimensiones de las tres aristas que concurren a un vértice de un paralelepípedo rectángulo, sabiendo que la arista mayor supera a la menor en 3 cm y a la otra arista en 1 cm, y que si se aumenta 1 cm a cada arista el volumen del paralelepípedo que tiene esas aristas, es los nueve cuartos del volumen del primitivo.*
R: 5 cm, 4 cm y 2 cm

84. *Calcular los radios de las bases de un tronco de cono de 12 cm de altura sabiendo que el volumen del mismo es de 1469,52 cm³ y que el radio de la base menor es un tercio del de la mayor. Tómese* $\pi \cong 3{,}14$. R: 9 cm y 3 cm

85. *Calcular los radios de las bases de un tronco de cono sabiendo que el de la base mayor supera al de la menor en 2 cm, que la altura del tronco es de 15 cm y su volumen de 3830,80 cm³. Tómese $\pi \cong 3,14$.* R: 8 cm y 10 cm

86. *Calcular los radios de las bases de un tronco de cono sabiendo que su generatriz es de 13 cm, su altura de 12 cm y su volumen de 1670,48 cm³. Tómese $\pi \cong 3,14$.* R: 4 cm y 9 cm

87. *Calcular los radios de dos esferas sabiendo que difieren en 2 cm y sus volúmenes en 3048,864 cm³. Tómese $\pi \cong 3,141$.* R: 12 cm y 10 cm

88. *Hallar el volumen de dos esferas secantes sabiendo que el radio del círculo común a ambas es de 12 cm, que las distancias entre los centros de las esferas es de 25 cm y que el radio de una de ellas que pasa por un punto de la circunferencia común, es perpendicular al radio de la otra esfera que pasa por ese mismo punto. Tómese $\pi \cong 3,14$.* R: 14130 cm³; 33493,333 cm³.

89. *Hallar el volumen de una esfera sabiendo que es igual a la suma de los volúmenes de dos cubos cuyas aristas difieren en 1 cm y sus volúmenes en 7 cm³.* R: 9 cm³

Aplicaciones a la Física.

Nota. — En los problemas que siguen se desprecia la resistencia del aire.

90. *Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 98 m/seg en un lugar en que la aceleración de la gravedad es $g = 9,8$ m/seg². ¿A cabo de cuánto tiempo alcanza una altura de 313,60 m?* R: 4 seg y 16 seg

91. *Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba con la velocidad inicial v_0 en un lugar en que la aceleración de la gravedad es g. ¿Al cabo de cuánto tiempo alcanza su altura máxima? ¿Cuál es esa altura?* R: $\frac{v_0}{g}$; $\frac{v_0^2}{2g}$

92. *Desde una altura de 4414,50 m fué arrojado un cuerpo, en un lugar en que la aceleración de la gravedad es $g = 9,81$ m/seg², con una velocidad inicial de 392,4 m/seg. ¿Cuánto tardará en llegar al suelo?* R: 10 seg

93. *Una piedra es abandonada a sí misma en la boca de un pozo. Después de $18\frac{3}{14}$ seg se oye el ruido producido por el choque de la misma con el fondo del pozo. ¿Qué profundidad tiene éste, si el sonido se propaga a razón de 343 m/seg y la aceleración de la gravedad es $g = 9,80$ m/seg²? ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en llegar al fondo?*

Solución. — Llamando x al tiempo que emplea la piedra en llegar al fondo, $18\frac{3}{14} - x$ es el tiempo que tarda el sonido en llegar a la boca del pozo. Como

el sonido y la piedra recorren el mismo espacio, que es la profundidad del pozo, el primero con movimiento uniforme y la segunda con movimiento uniformemente acelerado, se tiene:

$$343\left(18\frac{3}{14} - x\right) = \frac{1}{2}\,9,8\,x^2 \quad \therefore \quad 4,9\,x^2 + 343\,x - 343\,.\,18\frac{3}{14} = 0$$

dividiendo por 4,9 da $x^2 + 70\,x - 1275 = 0$ ∴ $x_1 = 15$ seg y $x_2 = -85$.

La profundidad del pozo es $h = \frac{1}{2}\,9,8\,.\,15^2 \cong 1102,50$ m.

94. *En Suecia existen cavernas en las cuales, dejando caer una piedra en su boca, se oye el choque de la misma en el fondo, 25 segundos después de haberla abandonado, ¿Qué profundidad tienen esas cavernas, si el sonido se propaga a razón de 340 m/seg?* R: 1870 m, aproximadamente

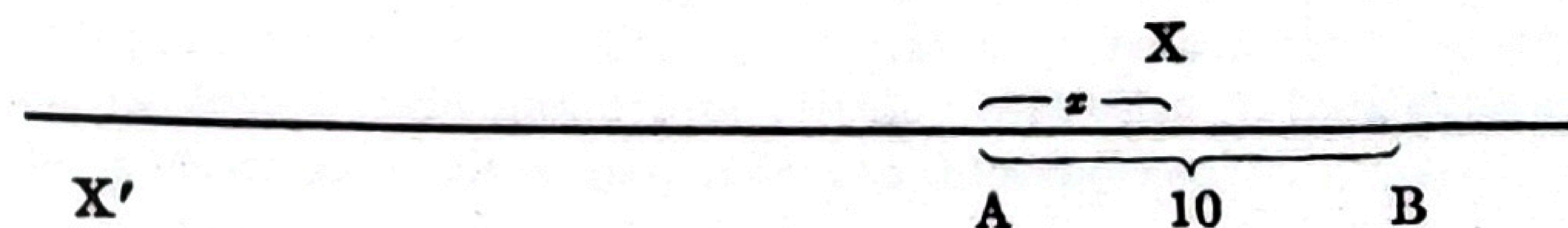
95. *Un aviador que se encuentra a 7840 m de altura deja caer una bomba. ¿Cuánto tiempo tarda ésta para llegar al suelo? ¿Después de cuánto tiempo oye el aviador la explosión de la bomba? $g = 9,8$ m/seg²; velocidad del sonido 340 m/seg.* R: 40 seg; 1 min 3 seg, aproximadamente

96. *Un tren marcha con movimiento uniforme con una velocidad de 72 km/h. En un cierto instante se cierra la entrada de vapor a los cilindros y se frena, con lo cual se le imprime una aceleración negativa de 0,80 m/seg². ¿Cuánto tiempo tarda en detenerse si desde el instante en que se cerró la entrada del vapor y comenzó a frenarse el tren recorrió 250 m?* R: 25 seg

97. *Un aviador hace un disparo hacia tierra dirigiendo el caño del arma verticalmente hacia abajo, en un lugar en que la aceleración de la gravedad es de 9,80 m/seg². ¿A qué altura debe encontrarse el avión para que el proyectil y el ruido del disparo lleguen al mismo tiempo a tierra? La velocidad del sonido es de 343 m/seg y la del proyectil es de 300 m/seg.* R: 3010 m

98. *Hallar un punto de una recta, que resulte igualmente iluminado por otros dos puntos luminosos A y B de la misma, sabiendo que la distancia $\overline{AB} = 10$ cm, la intensidad luminosa de A es de 4 bujías y la de B es de 9 bujías.*

Solución.



Llamando x a la distancia del punto X buscado al punto A, la de X a B es $10 - x$, y como la cantidad de luz que recibe un punto de una fuente luminosa es, según

la Física, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del punto a la fuente, resulta que la cantidad de luz que recibe X de A es $\frac{4}{x^2}$ y la que recibe de B es $\frac{9}{(10-x)^2}$

luego $\frac{4}{x^2} = \frac{9}{(10-x)^2}$, pues el punto es igualmente iluminado por A y por B.

Resolviendo esta ecuación resulta $x_1 = 4$ y $x_2 = -20$.

La primera solución nos dice que un punto buscado es el X del $\overline{AB}$ a 4 cm de A, y otro, el X', situado sobre la semirrecta de origen A que no contiene a B a 20 cm de A.

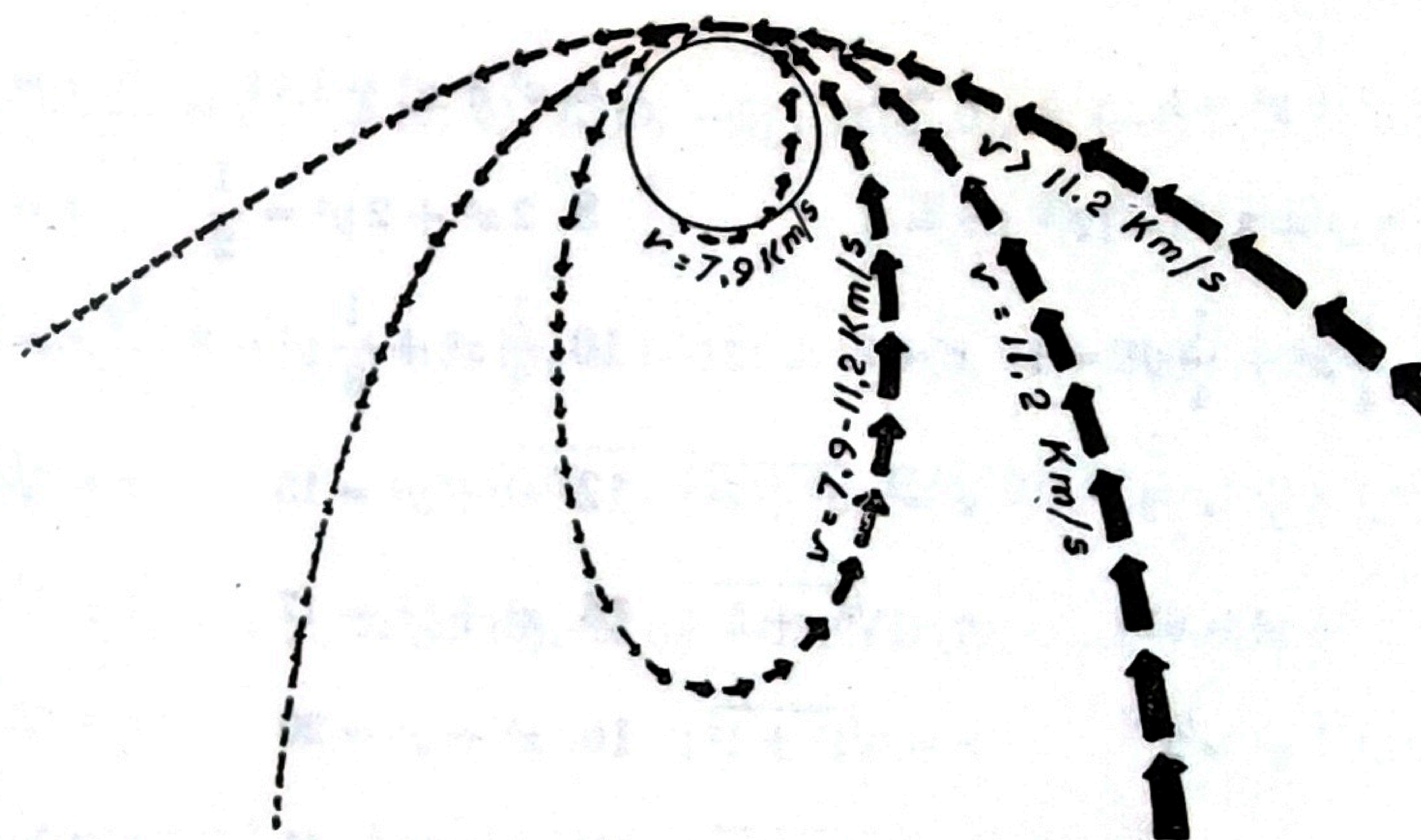
99. *Idem sabiendo que d = 50 cm y que las intensidades luminosas de ambas fuentes son de 100 bujías.*
R: 25 cm

100. *Idem sabiendo que d = 1 m y la intensidad luminosa de A es cuádruplo de la de B.*
R: X a 2 m de A; X' a 66,66... cm de A

REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES (*)

Se atribuye a Mecnemo, matemático griego (350 A. C.) el descubrimiento de la elipse, parábola e hipérbola como secciones de un cono y a otro matemático griego, Apolonio (250 A. C.), un estudio muy completo de esas curvas que compiló en ocho volúmenes.

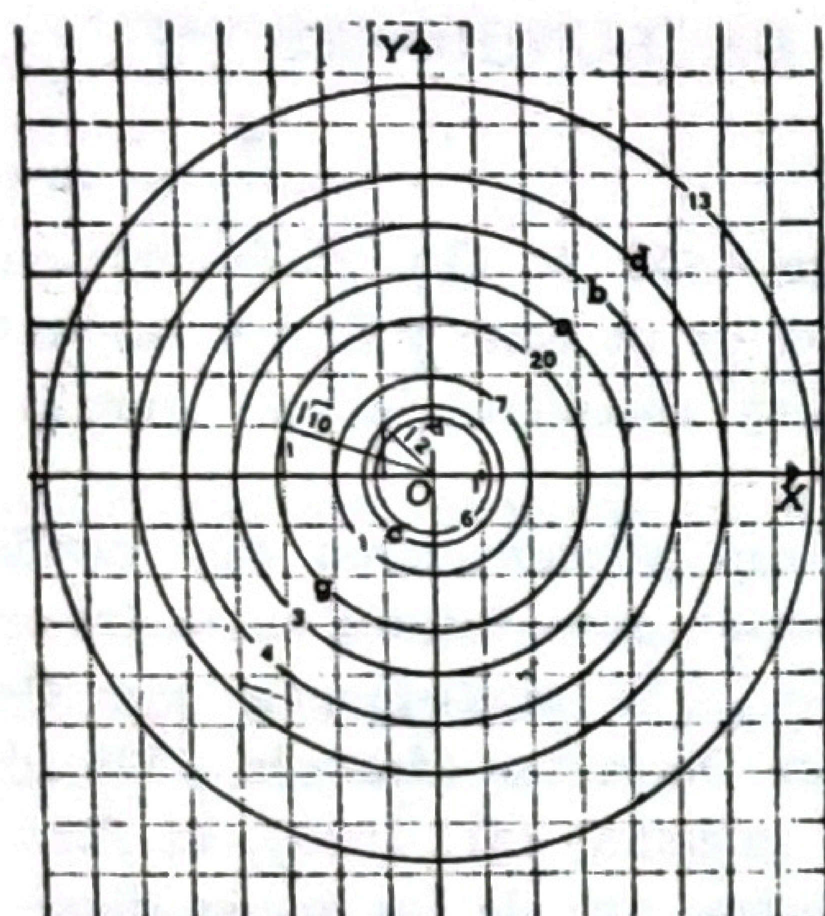
Durante unos 2000 años las secciones cónicas permanecieron casi olvidadas hasta que en el siglo XVII volvieron a despertar gran interés entre los matemáticos debido al estudio de sus propiedades hecho gráficamente por Desargues (francés, 1593-1662) y analíticamente por Descartes (francés, 1596-1650), y a la utilización de las mismas por Kepler (alemán, 1571-1630), al formular las leyes que rigen el movimiento de los planetas, una de las cuales dice: *Las órbitas descriptas por los planetas alrededor del Sol son elipses de las cuales éste ocupa uno de sus focos.* Posteriormente Newton (inglés, 1642-1727), expresó brevemente en forma algebraica esas leyes utilizando también las propiedades de las cónicas.



Las leyes de Kepler, Newton y Einstein han permitido calcular las velocidades que es necesario imprimir a un móvil ya sea para que la fuerza centrífuga que lo anime equilibre a la atracción terrestre y se convierta en un satélite de la Tierra describiendo una órbita circular ó elíptica, o bien supere a dicha atracción y describa órbitas parabólicas o hiperbólicas.

(*) En el Apéndice, págs. 231 a 233, se tratan: la *Representación gráfica de los conjuntos de soluciones de ecuaciones e inecuaciones de segundo grado.*

Gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. — *Es una circunferencia que tiene por centro el origen de los ejes y por radio a $\sqrt{r^2} = r$. A continuación se indica el radio de cada circunferencia, cuando el término independiente es un cuadrado perfecto, y la manera de obtener gráficamente ese radio mediante la aplicación del teorema de Pitágoras, cuando ese término independiente no es cuadrado perfecto. En la figura se han representado las ecuaciones* 1, 3, 6, 7, 13 *y* 20 *que siguen y las a, b, c, d, g, del texto* ARITMÉTICA Y ALGEBRA, *Cuarto Curso*, págs. 198-200.



1. $x^2 + y^2 = 4$ $\quad r = 2$

2. $x^2 + y^2 = 9$ $\quad r = 3$

3. $x^2 + y^2 = 16$ $\quad r = 4$

4. $x^2 + y^2 = 25$ $\quad r = 5$

5. $x^2 + y^2 = 1$ $\quad r = 1$

6. $x^2 + y^2 = 1{,}44$ $\quad r = 1{,}2$

7. $3\,x^2 + 3\,y^2 = 12$ $\quad r = 2$

8. $2\,x^2 + 2\,y^2 = \frac{1}{2}$ $\quad r = \frac{1}{2}$

9. $\frac{1}{4}\,x^2 + \frac{1}{4}\,y^2 = 1$ $\quad r = 2$

10. $\frac{1}{3}\,x^2 + \frac{1}{3}\,y^2 = 3$ $\quad r = 3$

11. $x^2 + y^2 = 29$ $\quad r = \sqrt{5^2 + 2^2}$;

12. $x^2 + y^2 = 13$ $\quad r = \sqrt{3^2 + 2^2}$

13. $x + y^2 = 61$ $\quad r = \sqrt{6 + 5^2}$;

14. $x^2 + y^2 = 17$ $\quad r = \sqrt{4^2 + 1^2}$

15. $x^2 + y^2 = 2$ $\quad r = \sqrt{1^2 + 1^2}$;

16. $x^2 + y^2 = 20$ $\quad r = \sqrt{2^2 + 4^2}$

17. $x^2 + y^2 = 5$ $\quad r = \sqrt{2^2 + 1^2}$;

18. $x^2 + y^2 = 41$ $\quad r = \sqrt{5^2 + 4^2}$

19. $x^2 + y^2 = 85$ $\quad r = \sqrt{6^2 + 7^2}$;

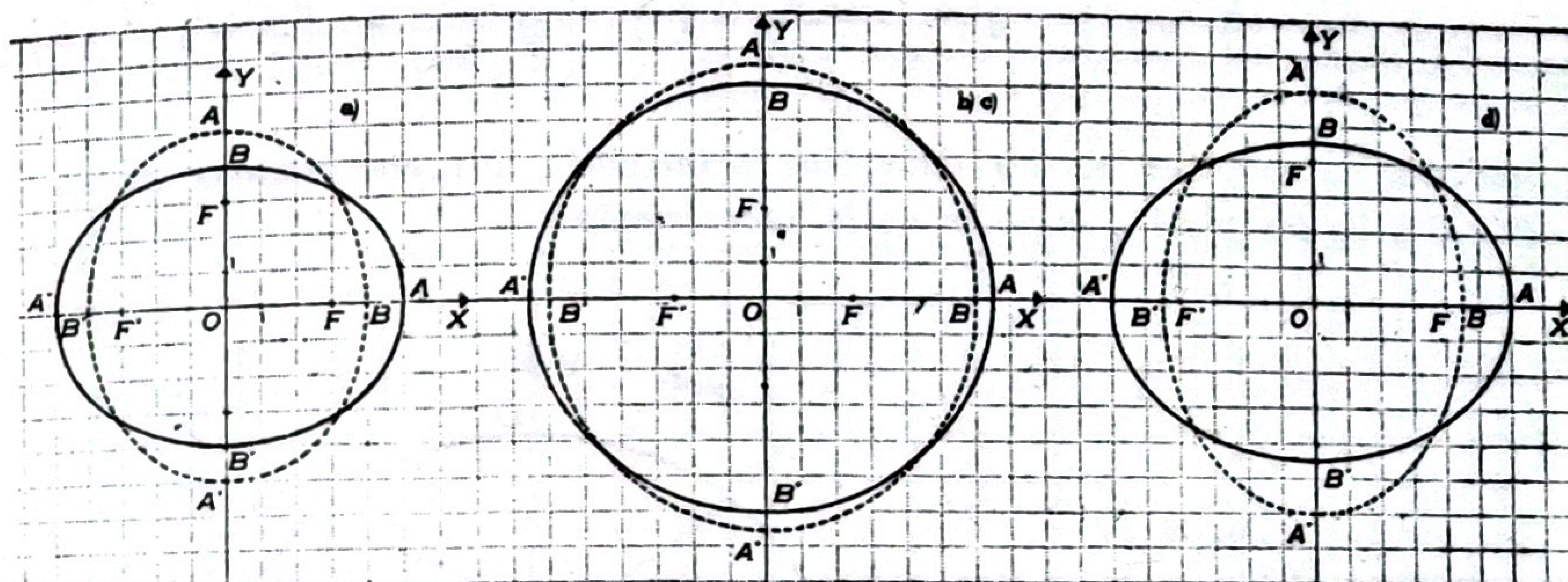
20. $x^2 + y^2 = 10$ $\quad r = \sqrt{3^2 + 1^2}$

Construir por puntos las elipses que tienen por centro el origen de los ejes sabiendo que

a) $2\,a = 10$ y $2\,b = 8$; *b)* $a = 13$ y $b = 12$

c) $a = 13$ y $c = 5$; *d)* $a = 6$ y $c = 4$

hallar sus ecuaciones, las coordenadas de los vértices y de los focos y la excentricidad.



a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; A (5; 0), A′ (−5; 0) ; B (0; 4), B′ (0; −4) ;

$c = \sqrt{25 - 16} = 3$; F (3; 0), F′ (−3; 0) ; $e = \frac{3}{5}$

y $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$; A (0; 5), A′ (0; −5) ; B (4; 0), B′ (−4; 0) ;

F (0; 3), F′ (0; −3) ; $e = \frac{3}{5}$

b) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$; A (13; 0), A′ (−13; 0) ; B (0; 12), B′ (0; −12) ;

$c = \sqrt{169 - 144} = 5$; F (5; 0), F′ (−5; 0) ; $e = \frac{5}{13}$

y $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$; A (0; 13), A′ (0; −13) ; B (12; 0), B′ (−12; 0) ;

F (0; 5), F′ (0; −5)

d) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$; A (6; 0), A′ (−6; 0) ; B (0; 4), B′ (0; −4) ;

$c = \sqrt{36 - 16} = 2\sqrt{5}$

F $(2\sqrt{5}\ ; 0)$, F′ $(-2\sqrt{5}\ ; 0)$; $e = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

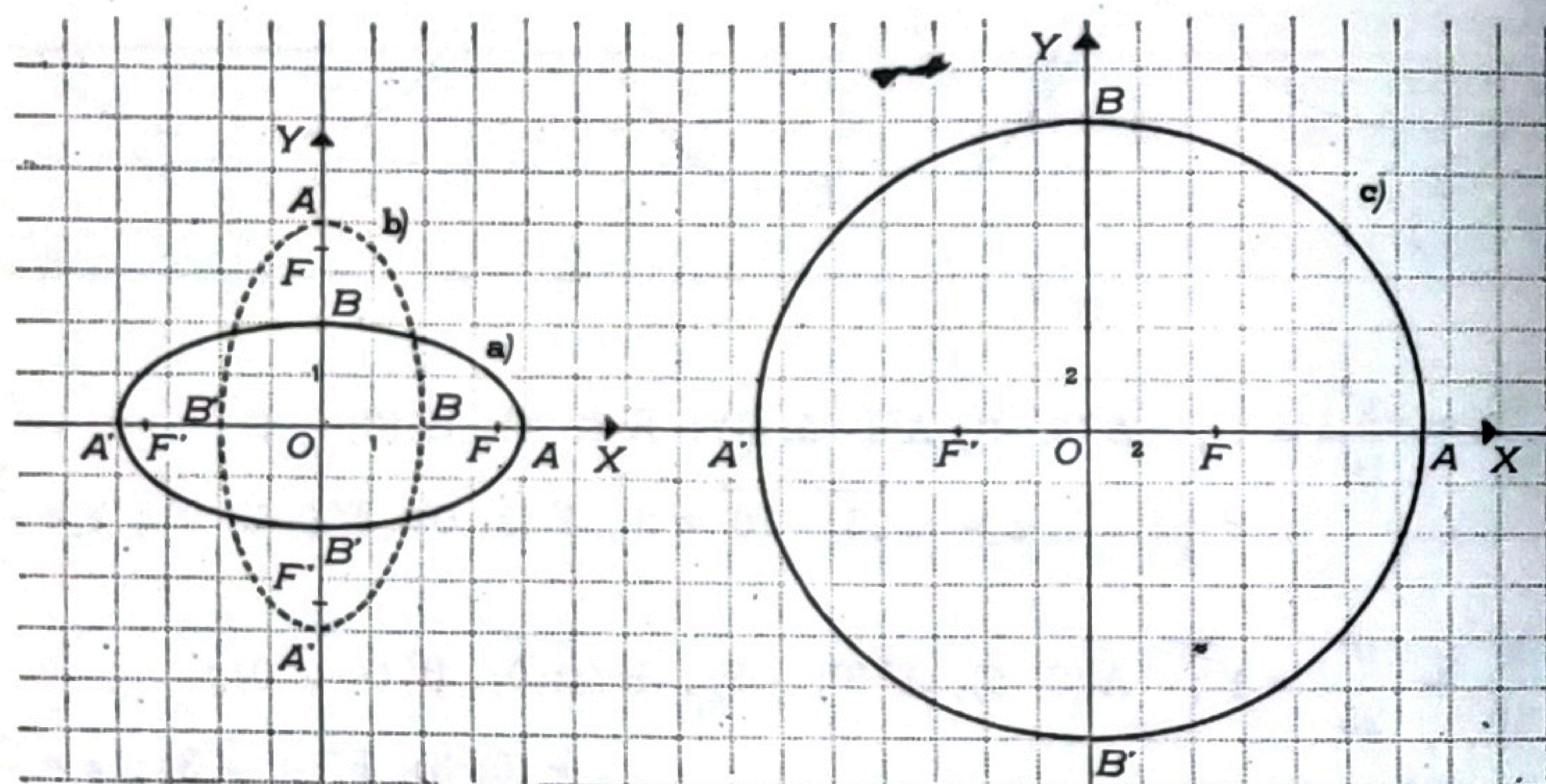
y $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$; A (0; 6), A′ (0; −6) ; B (4; 0), B′ (−4; 0) ;

F $(0;\ 2\sqrt{5})$, F′ $(0;\ -2\sqrt{5})$

Construir las elipses cuyas ecuaciones sean:

a) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$;   b) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$;   c) $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$

Calcular la longitud de los diámetros principales, las coordenadas de los vértices y de los focos y el valor de la excentricidad.



a) $2a = 8,\ 2b = 4$; A (4; 0), A′ (−4; 0) ; B (0; 2), B′ (0; −2) ;

$2c = 2\sqrt{4^2 - 2^2} = 4\sqrt{3}$; $F\left(2\sqrt{3};\ 0\right)$, $F'\left(-2\sqrt{3};\ 0\right)$; $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$2a = 8,\ 2b = 4$; A (0; 4), A′ (0; −4) ; B (2; 0), B′ (−2; 0) ;

$F\left(0;\ 2\sqrt{3}\right)$, $F'\left(0;\ -2\sqrt{3}\right)$

b) $2a = 26,\ 2b = 24$; $2c = \sqrt{169 - 144} = 10$; A (13; 0), A′ (−13; 0) ;

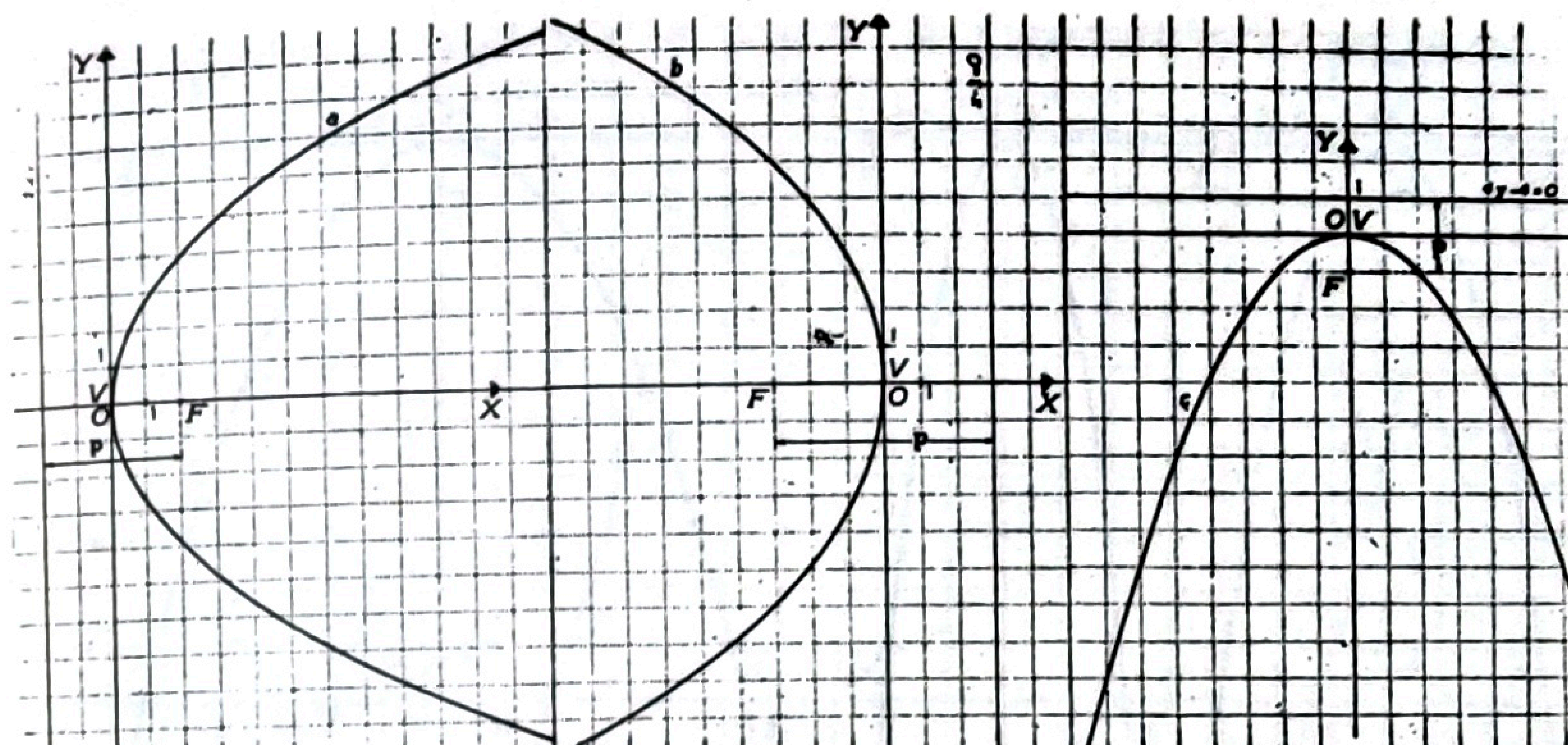
B (0; 12), B′ (0; −12) ; F (5; 0), F′ (−5; 0) ; $e = \dfrac{5}{13}$

Construir por puntos las parábolas de:

a) directriz $2x + 4 = 0$ y foco F (2; 0)

» $x - 3 = 0$ » » F (−3; 0)

y escribir sus ecuaciones.



a) $y^2 = 8x$;   b) $y^2 = -12x$;   c) $x^2 = -4y$

Construir por puntos las parábolas de ecuaciones:

a) $y = \dfrac{1}{4}x^2$;   b) $y = -2x^2$;   c) $y = \dfrac{1}{8}x^2$;   d) $y = -\dfrac{1}{3}x^2$

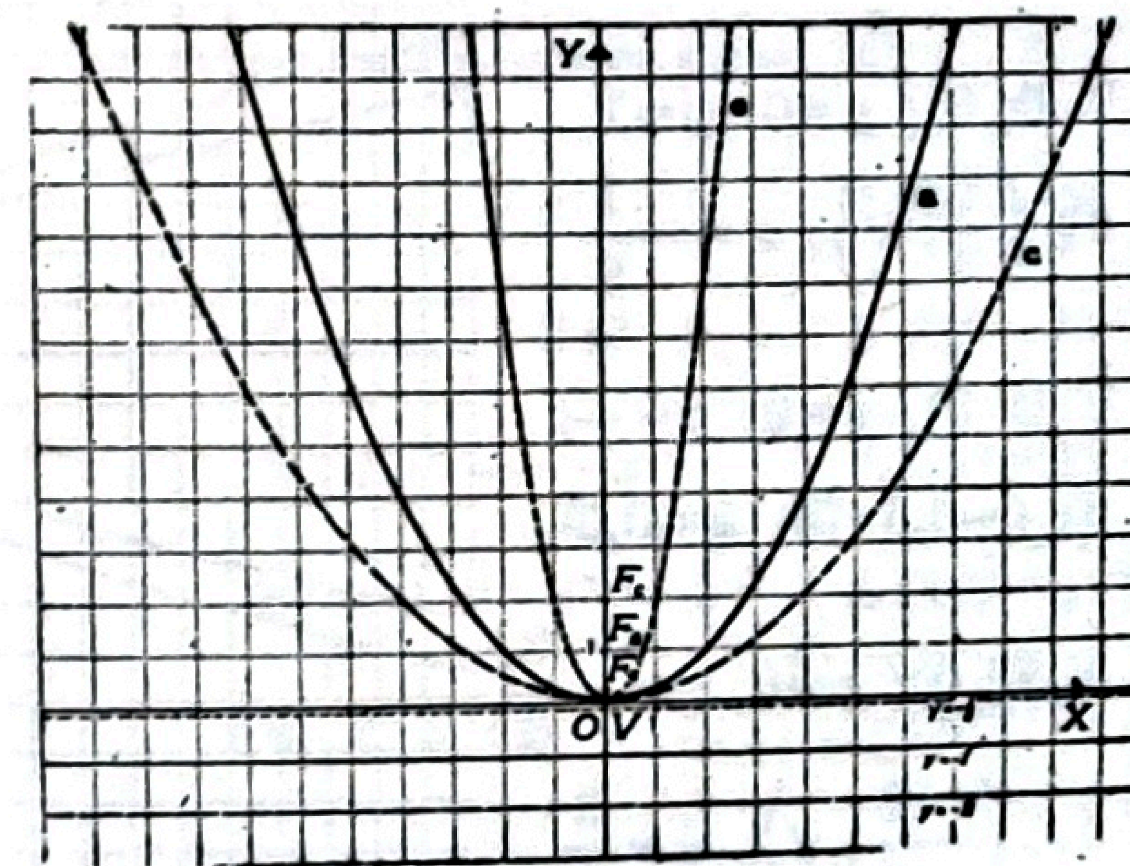
e) $y = 2x^2$;   f) $y = \dfrac{1}{2}x^2$;   g) $y = -x^2$;   h) $y = 0{,}1\,x^2$

i) $y^2 = 4x$;   j) $y^2 = 12x$;   k) $y^2 = 2x$;   l) $y^2 = -2x$

m) $y^2 = -3x$;   n) $y^2 = x$;   p) $x^2 = 2y$;   q) $x^2 = -3y$

Calcular las coordenadas del vértice, la ecuación del eje, el valor del parámetro, las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz.

Para los ejercicios *a*), *c*) y *e*) se tiene (Ver Aritmética y Algebra, IV curso, pág. 181):



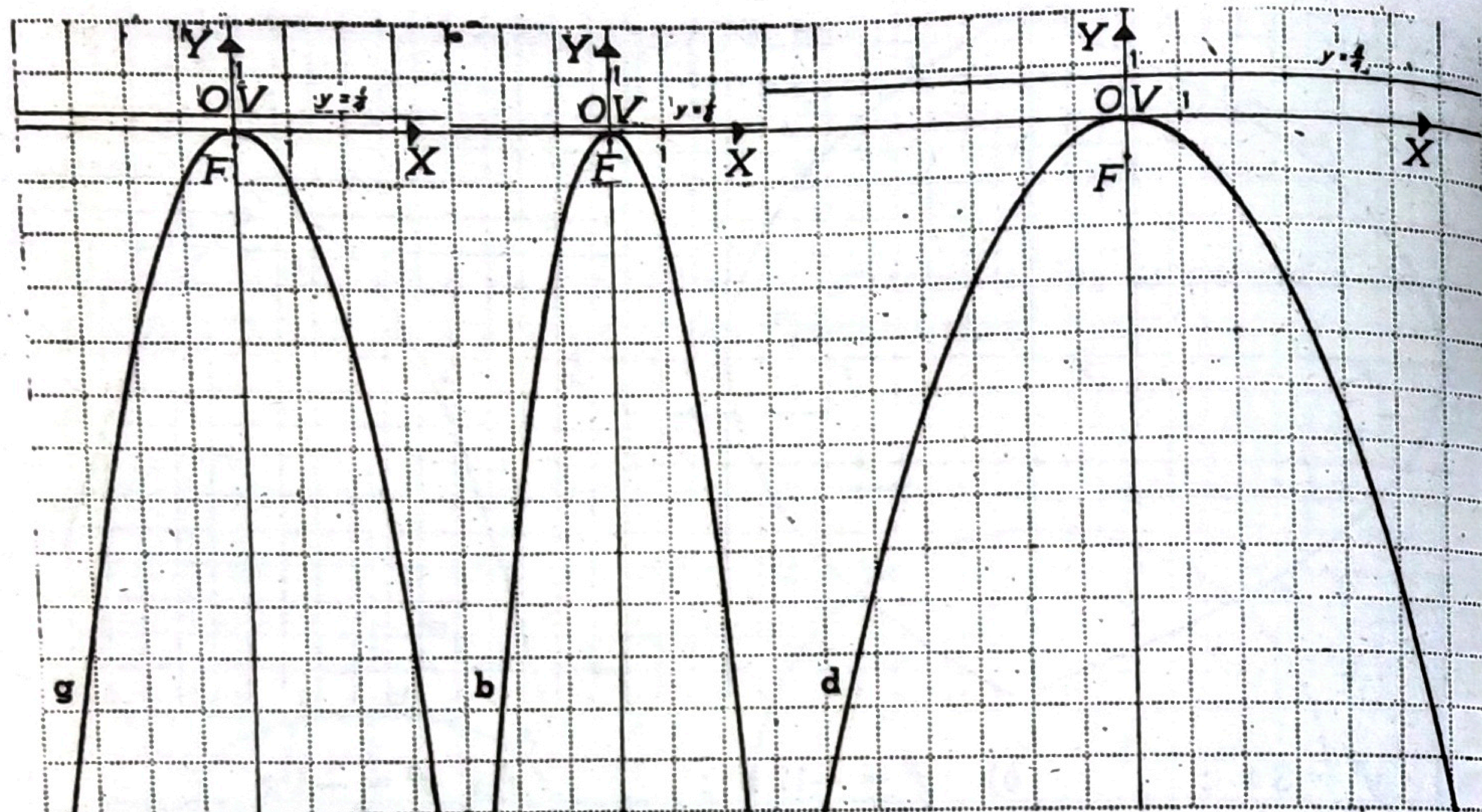
a) V (0; 0), $x = 0$; $p = 2$;
F (0; 1) ; $y = -1$ (*)

c) V (0; 0), $x = 0$; $p = 4$;
F (0; 2) ; $y = -2$

e) V (0; 0), $x = 0$; $p = \dfrac{1}{4}$;
$F\left(0;\ \dfrac{1}{8}\right)$; $y = -\dfrac{1}{8}$

(*) $x = 0$ es la ecuac. de OY; $y = -1$ es la ec. de la paral. a OX a la distancia −1

Para los ejercicios *b*), *d*) y *g*) se tiene:



b) V (0; 0) ; $x = 0$; $p = -\frac{1}{4}$; $F\left(0; -\frac{1}{8}\right)$; $y = \frac{1}{8}$

d) V (0; 0) ; $x = 0$; $p = -\frac{3}{2}$; $F\left(0; -\frac{3}{4}\right)$; $y = \frac{3}{4}$

g) V (0; 0) ; $x = 0$; $p = -\frac{1}{2}$; $F\left(0; -\frac{1}{4}\right)$; $y = \frac{1}{4}$

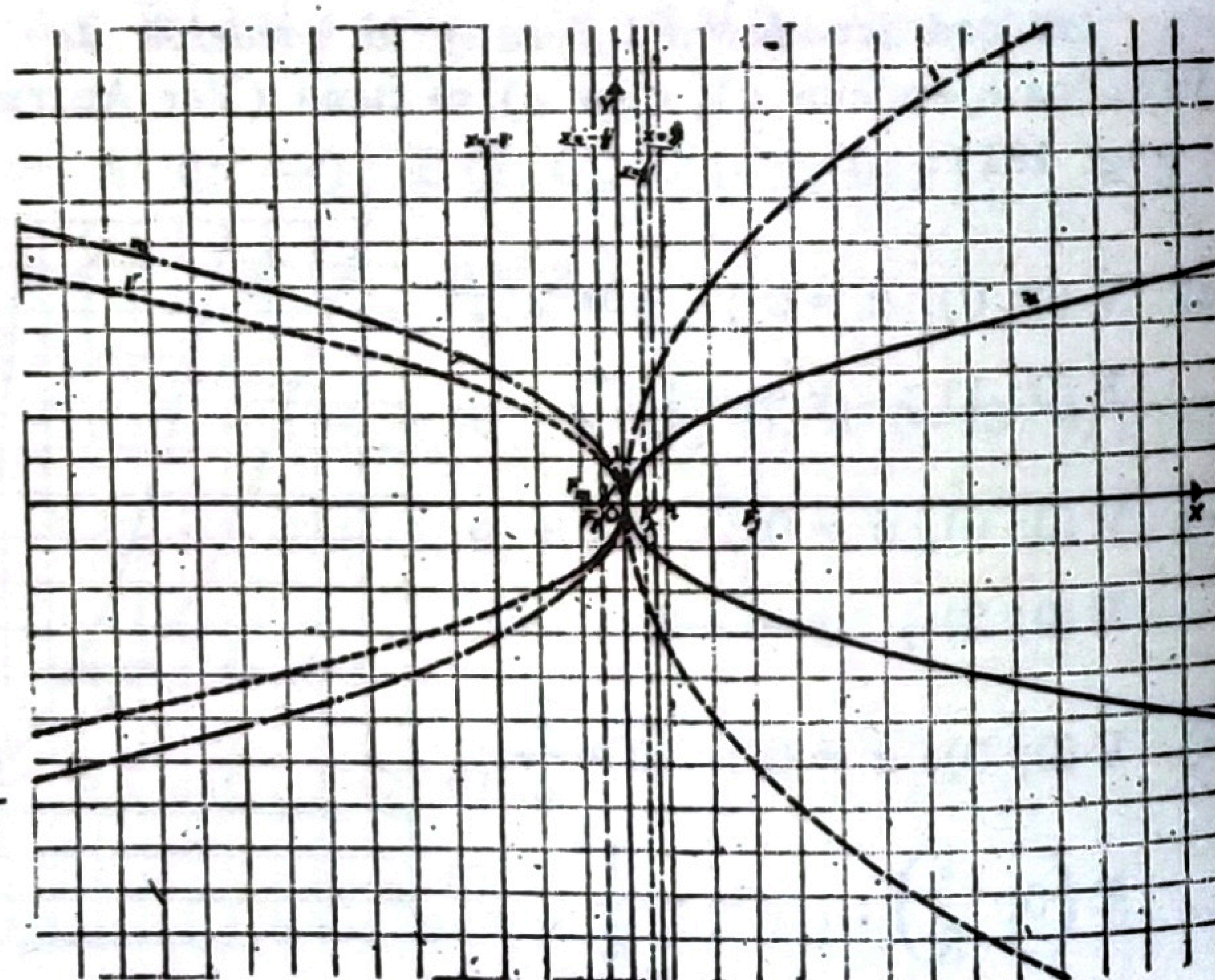
Para los ejercicios *j*), *k*), *l*) y *m*) resulta

j) V (0; 0); $y=0$; $p=6$
F_j (3; 0); $x=-3$ (*)

k) V (0; 0); $y=0$; $p=1$
$F_k\left(\frac{1}{2}; 0\right)$; $x=-\frac{1}{2}$

l) V (0; 0); $y=0$; $p=-1$
F_l (—0,5; 0); $x=0,5$

m) V (0; 0); $y=0$; $p=-\frac{3}{2}$
$F_m\left(-\frac{3}{4}; 0\right)$; $x=\frac{3}{4}$



(*) $y=0$ es la ecuac. de OX. $x=-3$ es la ec. de la paral. a OY a la distancia —3

Representación gráfica de la función racional entera de segundo grado. — *La gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$ es la parábola de eje paralelo al de las ies, cuyo vértice es el punto* $\left(-\frac{b}{2a} \Big/ -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ (*figura 1*).

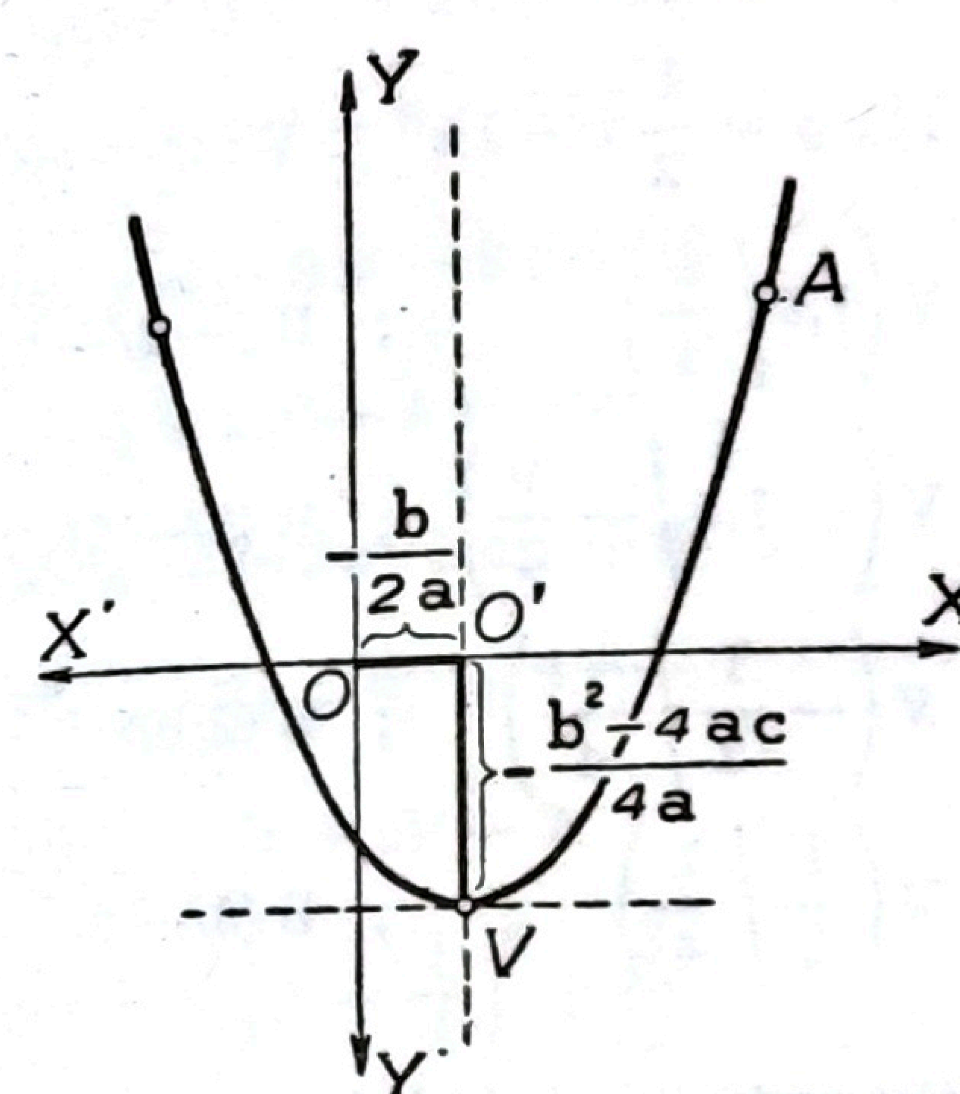


Fig.

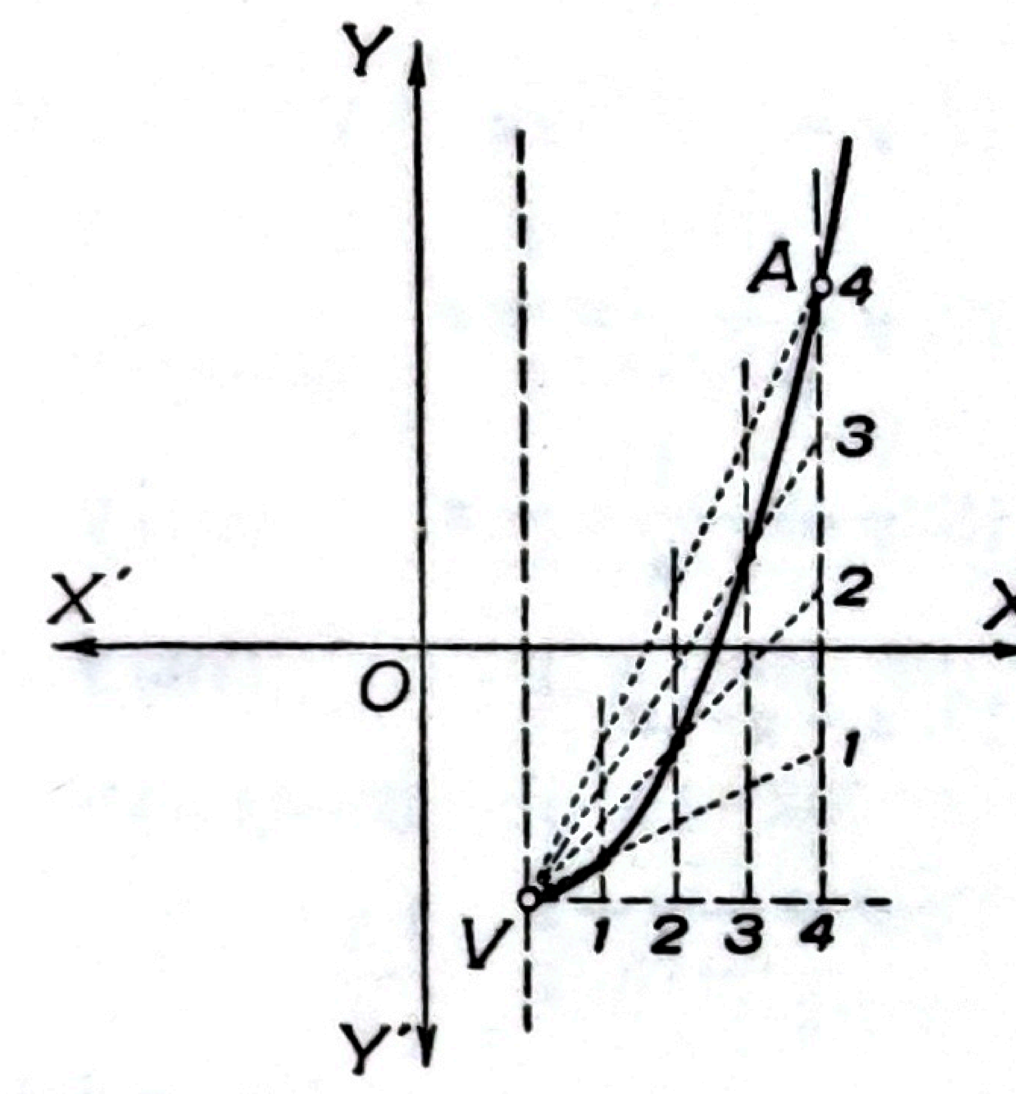


Fig. 2

*Conociendo el vértice V de la parábola y uno de sus puntos A, se obtienen otros puntos de la misma, sin necesidad de construir un cuadro de valores *, procediendo como se indica en la segunda figura.*

En los ejercicios que proponemos a continuación, damos los puntos V y A. Este último de abscisa conveniente para que no resulte muy próximo al V. Para determinar las coordenadas de V y demás elementos de cada parábola procédase como se indica en las págs. 161 y 162.

Caso en que el vértice es el origen (indicamos solamente el punto A).

1. $y = x^2$	A (3/9)	**2.** $y = -x^2$	A (3/— 9)
3. $y = 2x^2$	A (2/8)	**4.** $y = -2x^2$	A (2/— 8)
5. $y = \frac{1}{2}x^2$	A (4/8)	**6.** $y = -\frac{1}{2}x^2$	A (4/— 8)
7. $y - 0{,}1\,x^2 = 0$	A (10/10)	**8.** $y + 0{,}1\,x^2 = 0$	A (10/—10)
9. $x^2 - 3y = 0$	A (3/3)	**10.** $x^2 + 3y = 0$	A (3/— 3)

* Los alumnos podrán verificar analíticamente los valores obtenidos gráficamente.

Caso en que pasan por el origen y el vértice no coincide con él (indicamos solamente el punto V).

11. $y = x^2 + 4x$ V (—2/—4)

12. $y = x^2 - 4x$ V (2/—4)

13. $y = 3x^2 + 6x$ V (—1/—3)

14. $y = 3x^2 - 6x$ V (1/—3)

15. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x$ V (—3/—4,5)

16. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ V (3/—4,5)

17. $y = -\frac{1}{3}x^2 + x$ $V\left(1{,}5 \middle/ \frac{3}{4}\right)$; B (—3/—6)

18. $y = -\frac{1}{3}x^2 - x$ $V\left(-1{,}5 \middle/ -\frac{9}{4}\right)$; B (3/—6)

19. $x = y - x^2$ $V\left(-\frac{1}{2} \middle/ \frac{-1}{4}\right)$; B (2/6)

20. $x^2 = -y + x$ $V\left(\frac{1}{2} \middle/ \frac{1}{4}\right)$; B (3/—6)

Caso en que no pasan por el origen y el vértice pertenece al eje de las ies.

21. $y = x^2 + 3$ V (0/3) ; A (3/12) (*)

22. $y = x^2 - 3$ V (0/—3) ; A (3/6)

23. $y = 2x^2 + 5$ V (0/5) ; A (2/13)

24. $y = 2x^2 - 5$ V (0/—5) ; A (2/3)

25. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ V (0/3) ; A (4/11)

26. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ V (0/—3) ; A (4/5)

27. $y = -\frac{1}{4}x^2 + 6$ V (0/6) ; A (6/—3)

28. $y = -\frac{1}{4}x^2 - 6$ V (0/—6) ; A (2/—7)

29. $0{,}2x^2 = y - 1{,}8$ V (0/1,8) ; A (3/3,6)

30. $0{,}5x^2 - 5y = 10$ V (0/—2) ; A (5/0),5

(*) Para hallar la ordenada de A hágase $x = 3$ en la ecuación 21 y procédase en forma análoga en los ejercicios siguientes.

Caso general: la parábola no pasa por el origen

31. $y = x^2 + 2x - 5$ V (—1/—6) ; A (2/3)

32. $y = -x^2 + 2x - 5$ V (1/—4) ; A (4/—13)

33. $y = 3x^2 - 6x + 10$ V (1/7) ; A (0/10)

34. $y = -3x^2 - 6x + 10$ V (—1/13) ; A (1/1)

35. $y = 2x^2 - 4x - 6$ V (1/—8) ; A (4/10)

36. $y = -2x^2 + 4x + 6$ V (1/8) ; A (—2/—10)

37. $y = (x - 3)^2 + 7$ V (3/7) ; A (0/16)

38. $y = (x + 5)^2 - 2$ V (—5/—2) ; A (—2/7)

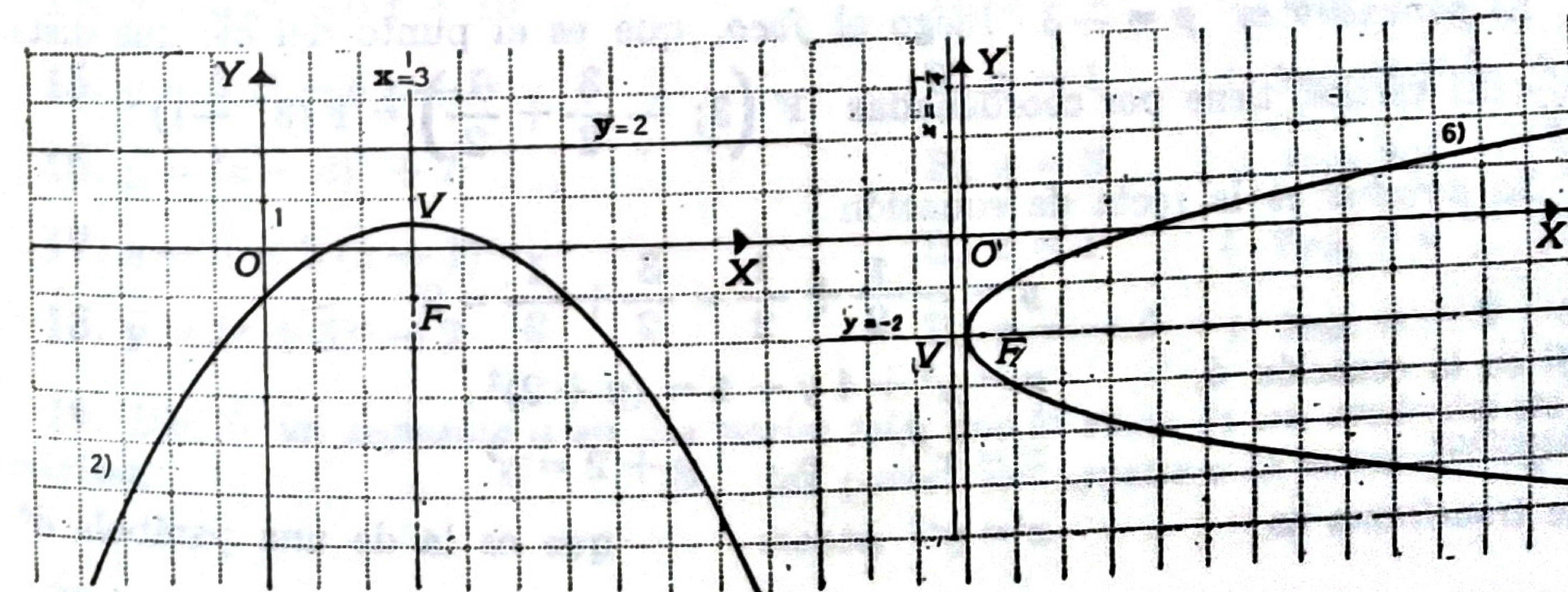
39. $y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$ $V\left(\frac{3}{2} \middle/ \frac{5}{2}\right)$; $A\left(-\frac{1}{2} \middle| \frac{13}{2}\right)$

40. $y + 8 = 2(x - 1)^2$ V (1/—8) ; A (4/10)

Para que sirvan de modelo representaremos las funciones

$$\mathbf{2.}\quad y = -\frac{1}{6}x^2 + x - 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{6.}\quad x = y^2 + 4y + 4 \quad (*)$$

calculando previamente los elementos que permiten construir las parábolas correspondientes (ARITMÉTICA Y ALGEBRA, IV curso, pág. 191).



(*) Con los números **2** y **6** se proponen a esos ejercicios en ARITMÉTICA Y ALGEBRA, IV curso, pág. 207.

Sacando $-\frac{1}{6}$ factor común se tiene:

$$y = -\frac{1}{6}(x^2 - 6x + 6)$$

sumando y restando 9 dentro del paréntesis

$$y = -\frac{1}{6}(x^2 - 6x + 9 - 9 + 6)$$

Como $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, y $-9 + 6 = -3$, resulta

$$y = -\frac{1}{6}[(x-3)^2 - 3] = -\frac{1}{6}(x-3)^2 + \frac{1}{2}, \quad \text{de donde}$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}(x-3)^2$$

haciendo $\quad y - \frac{1}{2} = y' \quad$ y $\quad x - 3 = x'$

se tiene $\quad y' = -\frac{1}{6}x'^2 \quad \therefore \quad x'^2 = -6y'$

que es una parábola referida a los ejes de origen V y paralelos a los OXY pues es de la forma

$$x'^2 = 2py'$$

El *vértice* de la parábola es $V\left(3; \frac{1}{2}\right)$ porque al ser V origen de los nuevos ejes es

$x' = 0$ o sea $x - 3 = 0 \quad \therefore \quad x = 3$ e $y' = 0$ o sea $y - \frac{1}{2} = 0 \quad \therefore \quad y = \frac{1}{2}$

El *eje* es la recta de ecuación $x' = 0$ de donde $x - 3 = 0 \quad \therefore \quad x = 3$

El *parámetro* es $p = -3$ luego el *foco*, que es el punto del eje que dista $\frac{p}{2}$ del vértice, tiene por coordenadas $F\left(3; -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) = F(3; -1)$

La *directriz* es la recta de ecuación

$$y = -\frac{p}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

Si en la ecuación 6, $\quad x = y^2 + 4y + 4 = (y+2)^2$

hacemos $\quad x = x' \quad$ e $\quad y + 2 = y'$

se transforma en $\quad x' = y'^2 \quad$ que es la de una parábola de

vértice $V(0; 0) = V(0; -2)$; *eje* $y' = y + 2 = 0 \quad \therefore \quad y = -2$

parámetro $p = \frac{1}{2}$; *foco* $F\left(\frac{1}{4}; -2\right)$ y *directriz* $x' = -\frac{1}{4}$

Hallar gráfica y analíticamente el valor de x que hace mínimo el valor de las funciones siguientes y dicho mínimo:

Para resolver los ejercicios propuestos en este párrafo y en el siguiente téngase presente que (como se demuestra en el apéndice, pág. 220): *Todo trinomio de segundo grado adquiere un valor mínimo o máximo según que el coeficiente del término de segundo grado sea positivo o negativo, respectivamente, para un valor de la variable igual al coeficiente del término de primer grado cambiado de signo dividido por el duplo del coeficiente del término de mayor grado.*

1. $y = x^2$ R: $x = 0$; $y_{min} = 0$
2. $y = \frac{1}{2}x^2$ R: $x = 0$; $y_{min} = 0$
3. $y = 0{,}1\,x^2$ R: $x = 0$; $y_{min} = 0$
4. $x^2 - 3y = 0$ R: $x = 0$; $y_{min} = 0$
5. $y = x^2 + 3$ R: $x = 0$; $y_{min} = 3$
6. $2x^2 - 5 = y$ R: $x = 0$; $y_{min} = -5$
7. $y = 0{,}2\,x^2 + 1{,}8$ R: $x = 0$; $y_{min} = 1{,}8$
8. $0{,}5\,x^2 - 5y = 10$ R: $x = 0$; $y_{min} = -2$
9. $y = x^2 + 4x$ R: $x = -2$; $y_{min} = -4$
10. $y = 3x^2 - 6x$ R: $x = 1$; $y_{min} = -3$
11. $x = y - x^2$ R: $x = -\frac{1}{2}$; $y_{min} = -\frac{1}{4}$
12. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x$ R: $x = -3$; $y_{min} = -4{,}5$
13. $y = x^2 + 2x - 5$ R: $x = -1$; $y_{min} = -6$
14. $y = 3x^2 - 6x + 10$ R: $x = 1$; $y_{min} = 7$
15. $y = 2x^2 - 4x - 6$ R: $x = 1$; $y_{min} = -8$
16. $y = (x-3)^2 + 7$ R: $x = 3$; $y_{min} = 7$
17. $y - 8 = 2(x-1)^2$ R: $x = 1$; $y_{min} = 8$
18. $y = (x+5)^2 - 2$ R: $x = -5$; $y_{min} = -2$
19. *Dividir un segmento a en dos partes tales que la suma de sus cuadrados sea mínima.* R: *las partes son iguales a la mitad del segmento.*
20. *Hallar entre todos los cuadrados inscriptos en uno dado el de área mínima.* R: *es el cuadrado que tiene por vértices los puntos medios de los lados del cuadrado.*

Hallar gráfica y analíticamente el valor de x que hace máximo el valor de las funciones siguientes, y dicho máximo.

1. $y = -x^2$ R: $x = 0$; $y_{max} = 0$

2. $y = -2x^2$ R: $x = 0$; $y_{max} = 0$

3. $y = -\frac{1}{2}x^2$ R: $x = 0$; $y_{max} = 0$

4. $y + 0{,}1\,x^2 = 0$ R: $x = 0$; $y_{max} = 0$

5. $y = -x^2 + x$ R: $x = \frac{1}{2}$; $y_{max} = \frac{1}{4}$

6. $y = -3x^2 + 6x$ R: $x = 1$; $y_{max} = 3$

7. $y = -\frac{1}{3}x^2 + x$ R: $x = 1{,}5$; $y_{max} = \frac{3}{4}$

8. $x^2 = -y + x$ R: $x = \frac{1}{2}$; $y_{max} = \frac{1}{2}$

9. $y = -x^2 + 4$ R: $x = 0$; $y_{max} = 4$

10. $y = -2x^2 + 6$ R: $x = 0$; $y_{max} = 6$

11. $y = -0{,}2\,x^2 - 1{,}8$ R: $x = 0$; $y_{max} = -1{,}8$

12. $y = -\frac{1}{4}x^2 - 6$ R: $x = 0$; $y_{max} = -6$

13. $y = -x^2 + 2x - 5$ R: $x = 1$; $y_{max} = -4$

14. $y = -3x^2 - 6x + 10$ R: $x = -1$; $y_{max} = 13$

15. $y = -2x^2 + 4x + 6$ R: $x = 1$; $y_{max} = 8$

16. $y = -x^2 + 2x + 4$ R: $x = 1$; $y_{max} = 5$

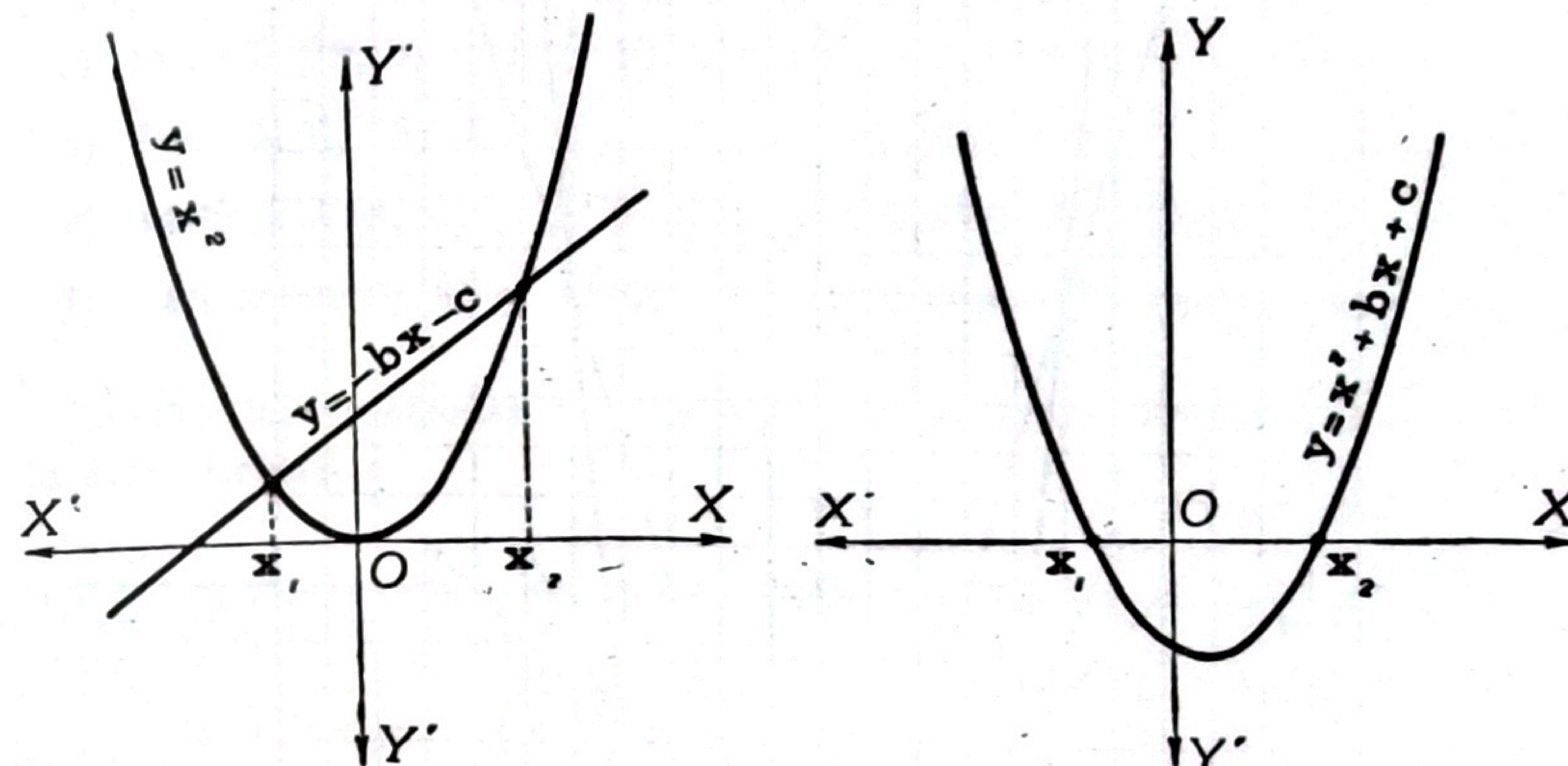
17. $2 = (x + 1)^2 + y$ R: $x = -1$; $y_{max} = 2$

18. $3 - y = (x - 1)^2$ R: $x = 1$; $y_{max} = 3$

19. *Hallar entre todos los rectángulos que tienen un perímetro dado, 2 p, el de área máxima.* R: *es el cuadrado de lado igual a la cuarta parte del perímetro.*

20. *Hallar entre todos los rectángulos inscriptos en un círculo dado, el que tiene área máxima.* R: *es el cuadrado inscripto en el círculo dado.*

*** Resolución nomográfica y gráfica de una ecuación de segundo grado.** — *Las raíces de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ son las abscisas de los puntos comunes a la parábola $y = x^2$ y a la recta $y = -bx - c$; y, también, las abscisas de los puntos en que la parábola $y = x^2 + bx + c$ corta al eje de las x.*



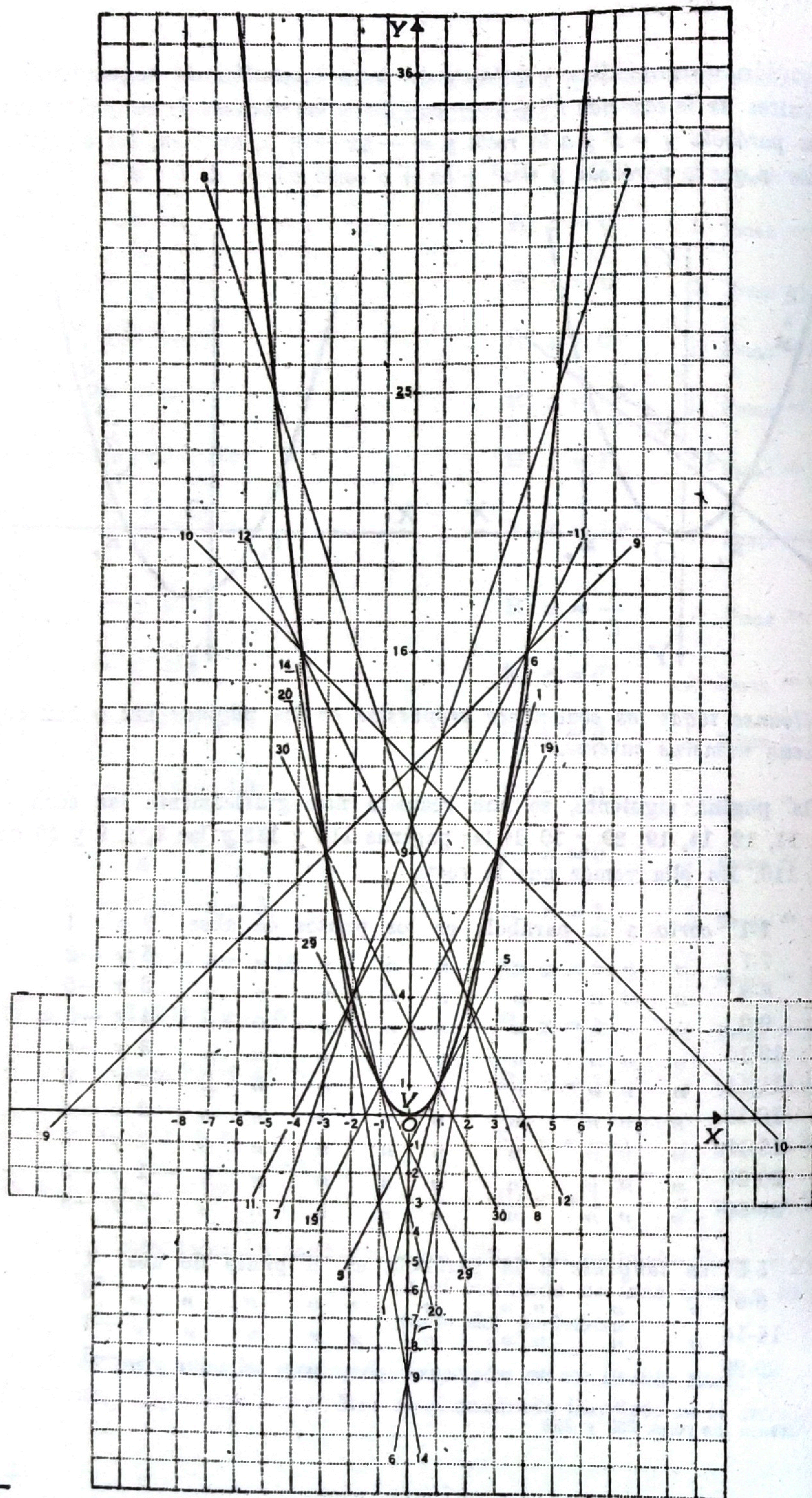
Resuélvanse todas las ecuaciones propuestas en las páginas 112 *y* 122 *cuyas raíces sean números enteros.*

En la página siguiente, se han resuelto nomográficamente las ecuaciones 1, 5, 6, 11, 12, 14, 19, 29 y 30 de las páginas 112 y 113 y las 7, 8, 9 y 10 de la página 116. En ella vemos que la recta

1-1	*corta* a la parábola en los puntos de absc.	3 y 1
7-7	” ” ” ” ” ” ” ” ”	5 y —2
8-8	” ” ” ” ” ” ” ” ”	2 y —5
9-9	” ” ” ” ” ” ” ” ”	4 y —3
10-10	” ” ” ” ” ” ” ” ”	3 y —4
11-11	” ” ” ” ” ” ” ” ”	—2 y 4
12-12	” ” ” ” ” ” ” ” ”	2 y —4
19-19	” ” ” ” ” ” ” ” ”	—1 y 3
20-20	” ” ” ” ” ” ” ” ”	—1 y —3
30-30	” ” ” ” ” ” ” ” ”	1 y —3

5-5	es *tangente* a la parábola en el punto de abs.	1
6-6	” ” ” ” ” ” ” ” ” ”	3
14-14	” ” ” ” ” ” ” ” ” ”	—3
29-29	” ” ” ” ” ” ” ” ” ”	—1

(*) Véanse las págs. 257 y 258



a) focos F (5; 0) y F′ (—5; 0) y diámetro axial real $2a = 8$

b) focos F (0; 5) y F′ (0; —5) y diámetro real $2a = 8$

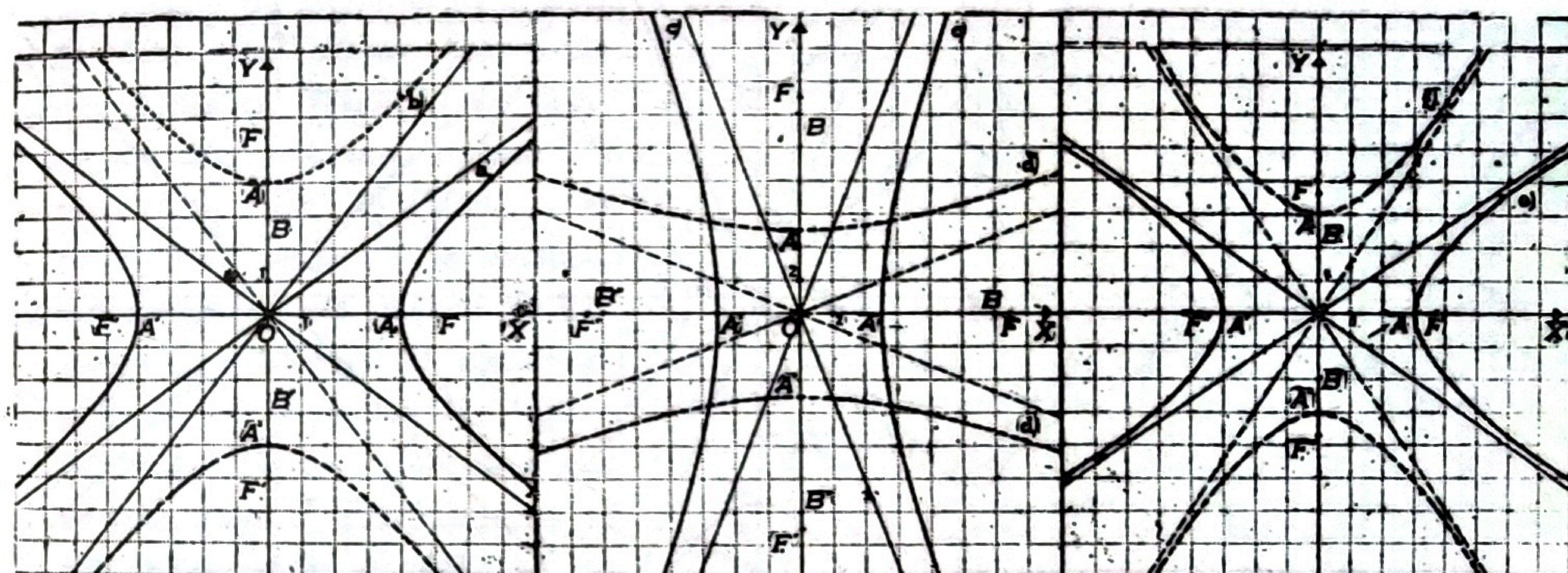
c) focos F (13; 0) y F′ (—13; 0) y vértices A (5; 0) y A′ (—5; 0)

d) focos F (0; 13) y F′ (0; —13) y vértices ficticios B (12; 0) y B′ (—12; 0)

e) vértices A (3; 0) y A′ (—3; 0) y diámetro axial ficticio $2b = 4$

f) vértices A (0; 3) y A′ (0; —3) y diámetro axial ficticio $2b = 4$

Escribir las ecuaciones de esas hipérbolas y de sus asíntotas y el valor de la excentricidad.



a) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1;\quad \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{3} = 0;\quad \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} = 0;\quad b = \sqrt{25-16} = 3;\quad e = \dfrac{5}{4}$

b) $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1;\quad \dfrac{y}{4} - \dfrac{x}{3} = 0;\quad \dfrac{y}{4} + \dfrac{x}{3} = 0;\quad b = \sqrt{25-16} = 3;\quad e = \dfrac{5}{4}$

c) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{144} = 1;\quad \dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{12} = 0;\quad \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{12} = 0;\quad b = \sqrt{13^2-5^2} = 12;\quad e = \dfrac{13}{5}$

d) $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{144} = 1;\quad \dfrac{y}{5} - \dfrac{x}{12} = 0;\quad \dfrac{y}{5} + \dfrac{x}{12} = 0;\quad b = \sqrt{13^2-5^2} = 12;\quad e = \dfrac{13}{5}$

e) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1;\quad \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 0;\quad \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 0;\quad c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13};\quad e = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

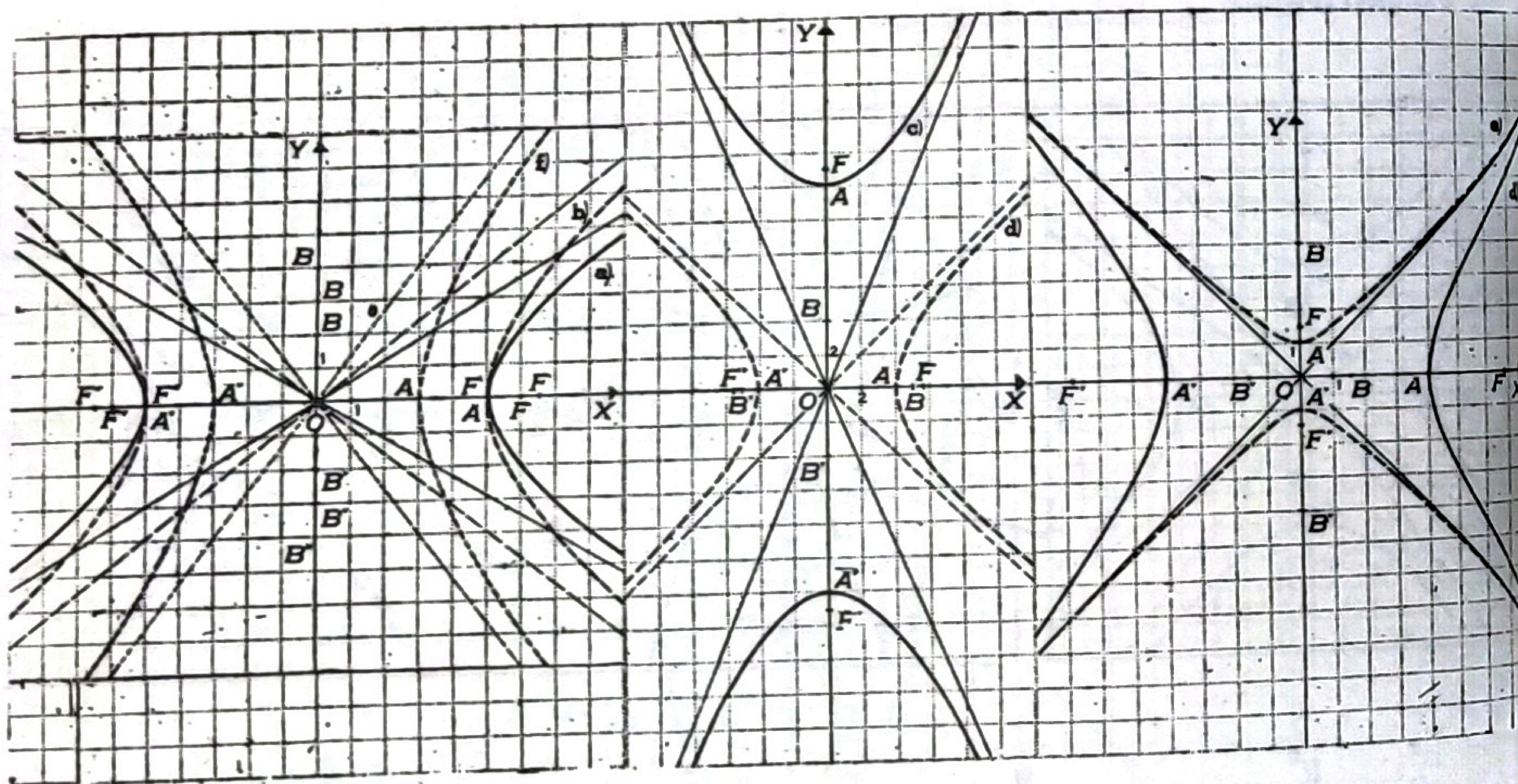
f) $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{4} = 1;\quad \dfrac{y}{3} - \dfrac{x}{2} = 0;\quad \dfrac{y}{3} + \dfrac{x}{2} = 0;\quad c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13};\quad e = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$

Construir por puntos las hipérbolas

a $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$; b) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$; c) $\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{25}=1$

d) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$; e) $y^2 - x^2 = 1$; f) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

Calcular la longitud de los diámetros axiales y de la distancia focal, las coordenadas de los focos y de los vértices y el valor de la excentricidad. Escribir las ecuaciones de las asíntotas.



a) $2a = 10;\ 2b = 6$; $c = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$; $F(\sqrt{34};\ 0)$, $F'(-\sqrt{34};\ 0)$

A (5; 0) , A′ (−5; 0) ; B (0; 3), B′ (0; −3) ; $e = \frac{\sqrt{34}}{5}$

b) $2a = 10;\ 2b = 8$; $c = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$; $F(\sqrt{41};\ 0)$, $F'(-\sqrt{41};\ 0)$

A (5; 0) , A′ (−5; 0) ; B (0; 4), B′ (0; −4) ; $e = \frac{\sqrt{41}}{5}$

c) $2a = 24;\ 2b = 10;\ c = \sqrt{144+25} = 13$; F (0; 13) , F′ (0; −13)

A (0; 12), A′ (0; −12); B (5; 0), B′ (−5; 0) ; $e = \frac{13}{12}$

d) $2a = 8$; $2b = 8$; $c = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$; $F(4\sqrt{2};\ 0)$, $F'(-4\sqrt{2};\ 0)$

A (4; 0) , A′ (−4; 0) ; B (0; 4), B′ (0; −4) ; $e = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$

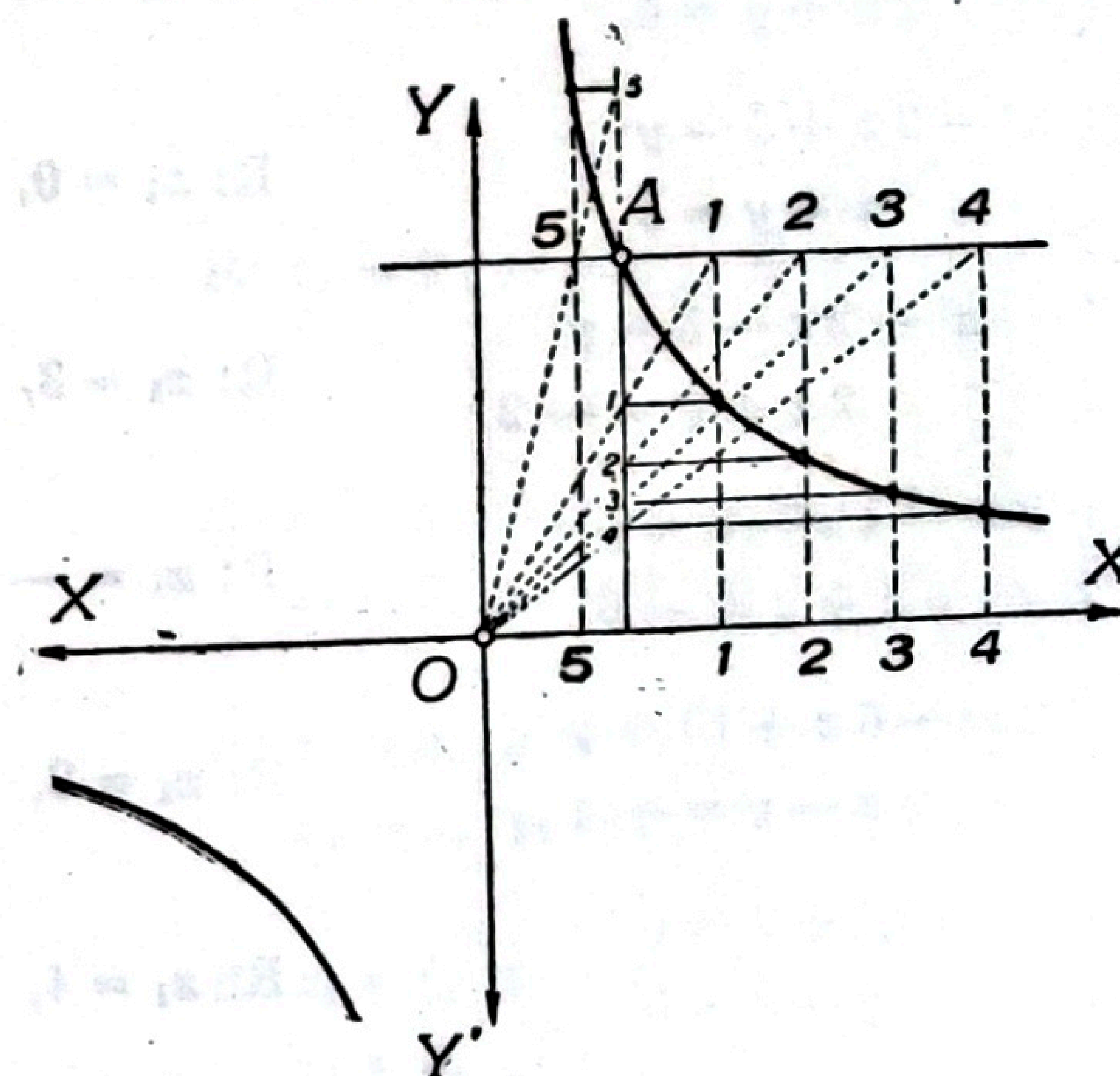
e) $2a = 2$; $2b = 2$; $c = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $F(0;\ \sqrt{2})$, $F'(0;\ -\sqrt{2})$

A (0; 1) , A′ (0; −1) ; B (1; 0), B′ (−1; 0) ; $e = \sqrt{2}$

f) $2a = 6$; $2b = 8$; $c = \sqrt{9+16} = 5$; F (5; 0) , F′ (−5; 0)

A (3; 0) , A′ (−3; 0) ; B (0; 4), B′ (0; −4) ; $e = \frac{5}{3}$

Gráfica de la ecuación $xy = k$. — *Es una hipérbola equilátera que tiene por centro de simetría al origen de los ejes. Estos ejes son sus asíntotas. Obtenido un punto de una de las ramas de una hipérbola equilátera, se determinan otros de la misma, sin construir un cuadro de valores (*), mediante la construcción que se indica en la figura adjunta. En los ejercicios que se proponen a continuación se da para cada hipérbola, un punto, A, de una de sus ramas, obtenido dando un valor, no nulo, cualquiera a x y hallando el correspondiente de y.*



1. $xy = 1$	A (1/1)	**2.** $xy = -1$	A (1/− 1)
3. $xy = 2$	A (1/2)	**4.** $xy = -2$	A (1/− 2)
5. $xy = \frac{1}{2}$	$A\left(1\middle/\frac{1}{2}\right)$	**6.** $xy = -\frac{1}{2}$	$A\left(1\middle/-\frac{1}{2}\right)$
7. $xy = 9$	A (1/9)	**8.** $xy = -9$	A (1/− 9)
9. $xy = 28$	A (7/4)	**10.** $xy = -20$	A (5/− 4)

(*) Los alumnos podrán verificar analíticamente, los puntos obtenidos gráficamente.

11. $xy = 10$ A (2/5)

12. $xy = 6$ A (1/6)

13. $xy = 18$ A (3/6)

14. $xy = 4$ A (1/4)

15. $xy = 6$ A (1/6)

16. $xy = 20$ A (4/5)

17. $xy = 42$ A (6/7)

18. $xy = 3$ A (1/3)

19. $xy = -6$ A (1/— 6)

20. $xy = -4$ A (1/— 4)

Resolver gráficamente y analíticamente los sistemas siguientes:

1. $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = y \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ R: $x_1 = 2,\ y_1 = 0;\quad x_2 = 1,\ y_2 = 2$

2. $\begin{cases} x^2 - 2x + 5 = y \\ x + y = 5 \end{cases}$ R: $x_1 = 0,\ y_1 = 5;\quad x_2 = 1,\ x_2 = 4$

3. $\begin{cases} -x^2 + 2x - 5 = y \\ 2x + y = -2 \end{cases}$ R: $x_1 = 3,\ y_1 = -8;\ x_2 = 1,\ y_2 = -4$

4. $\begin{cases} 2x^2 - 4x - 6 = y \\ 6x + y = -6 \end{cases}$ R: $x_1 = -1,\ y_1 = 0;\ x_2 = 0,\ y_2 = -6$

5. $\begin{cases} 3x^2 - 6x + 10 = y \\ 3x - y = -4 \end{cases}$ R: $x_1 = 2,\ y. = 10\quad x_2 = 1,\ y_2 = 7$

6. $\begin{cases} (x-3)^2 + 7 = y \\ y - 8 = 0 \end{cases}$ R: $x_1 = 4,\ y_1 = 8;\ x_2 = 2,\ y_2 = 8$

7. $\begin{cases} (x+5)^2 - 2 = y \\ 3x - y = -13 \end{cases}$ R: $x_1 = -5,\ y_1 = -2;\ x_2 = -2,\ y_2 = 7$

8. $\begin{cases} -3x^2 - 6x + 10 = y \\ 6x + y = -19 \end{cases}$ R: $x_1 = -1,\ y_1 = 13;\ x_2 = -3,\ y_2 = 1$

9. $\begin{cases} y = -2x^2 + 4x + 6 \\ y = 6x + 6 \end{cases}$ R: $x_1 = -1,\ y_1 = 0;\ x_2 = 0,\ y_2 = 6$

10. $\begin{cases} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} = y \\ 8x - 2y = 7 \end{cases}$ R: $x_1 = \frac{1}{2},\ y_1 = -\frac{3}{2};\ x_2 = \frac{13}{2},\ y_2 = \frac{45}{2}$

11. $\begin{cases} y - x^2 = 4x \\ 3x - y = -2 \end{cases}$ R: $x_1 = -2,\ y_1 = -4;\ x_2 = 1,\ y_1 = 5$

12. $\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - y = 0 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ R: $x_1 = 1,\ y_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = -2,\ y_2 = 2$

13. $\begin{cases} -2x^2 + 3 = y \\ y - 4x = 3 \end{cases}$ R: $x_1 = 0,\ y_1 = 3;\ x_2 = -2,\ y_1 = -5$

14. $\begin{cases} \frac{1}{3}x^2 - y = 3x \\ y + 6 = -\frac{5}{3}x + 5 \end{cases}$ R: $x_1 = 3,\ y_1 = -6;\ x_2 = 1,\ y_1 = -\frac{8}{3}$

15. $\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x = \frac{1}{6}y \\ y - 3x = 3 \end{cases}$ R: $x_1 = 2,\ y_1 = 9;\ x_2 = -\frac{1}{2};\ y = \frac{3}{2}$

16. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ xy = 10 \end{cases}$ R: $x_1 = 5,\ y_1 = 2;\ x_2 = -5,\ y_2 = -2;$ $x_3 = 2,\ y_3 = 5;\ x_4 = -2,\ y_4 = -5$

17. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$ R: $x_1 = 3,\ y = 2;\ x_2 = -3,\ y = -2;$ $x_3 = 2,\ y_3 = 3;\ x_4 = -2,\ y_4 = -3$

18. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 61 \\ xy = 30 \end{cases}$ R: $x_1 = 6,\ y_1 = 5;\ x_2 = -6,\ y_2 = -5;$ $x_3 = 5,\ y_3 = 6;\ x_4 = -5,\ y_4 = -6$

19. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{cases}$ R: $x_1 = 4,\ y_1 = 1;\ x_2 = -4,\ y_2 = -1;$ $x_3 = 1,\ y_3 = 4;\ x_4 = -1,\ y_4 = -4$

20. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$ R: $x_1 = 1,\ y_1 = 1;\ x_2 = -1,\ y_2 = -1;$ $x_3 = 1,\ y_3 = 1;\ x_4 = -1,\ y_4 = -1$

21. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ xy = 8 \end{cases}$ R: $x_1 = 4,\ y_1 = 2;\ x_2 = -4,\ y_2 = -2;$ $x_3 = 2,\ y_3 = 4;\ x_4 = -2,\ y_4 = -4$

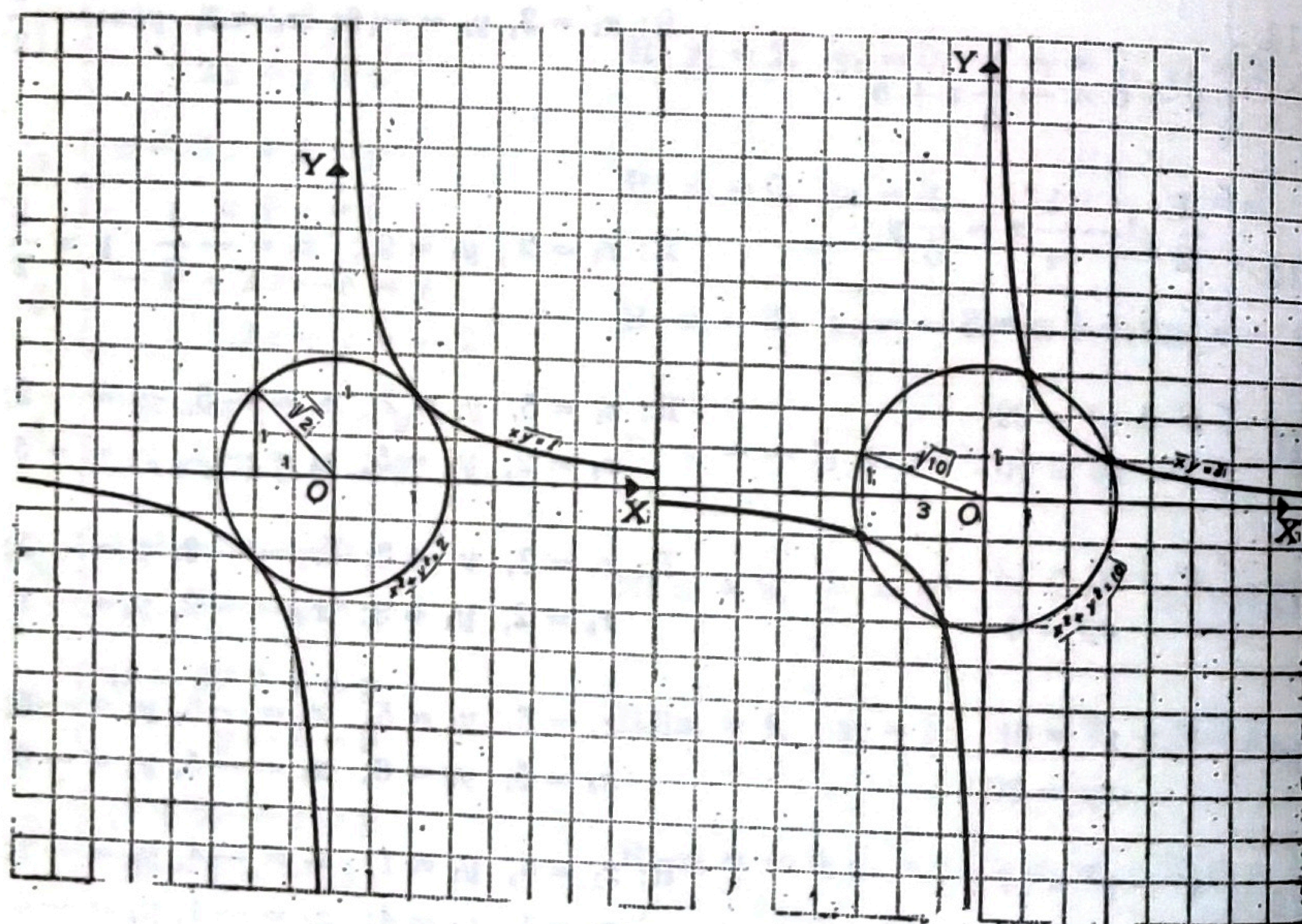
22. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$ R: $x_1 = 2,\ y_1 = 1;\ x_2 = -2,\ y_2 = -1;$ $x_3 = 1,\ y_3 = 2;\ x_4 = -1,\ y_4 = -2$

23. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ xy = 20 \end{cases}$ R: $x_1 = 5,\ y_1 = 4;\ \ x_2 = -5,\ y_2 = -4;$
$x_3 = 4,\ y_3 = 5;\ \ x_4 = -4,\ y_4 = -5$

24. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 85 \\ xy = 42 \end{cases}$ R: $x_1 = 7,\ y_1 = 6;\ \ x_2 = -7,\ y_2 = -6;$
$x_3 = 6,\ y_3 = 7;\ \ x_4 = -6,\ y_4 = -7$

25. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$ R: $x_1 = 3,\ y_1 = 1;\ \ x_2 = -3,\ y_2 = -1;$
$x_3 = 1,\ y_3 = 3;\ \ x_4 = -1,\ y_4 = -3$

A continuación damos como ejemplo la resolución gráfica de los sistemas 20 y 25.



ANALISIS COMBINATORIO

El *Análisis Combinatorio* tiene por objeto la determinación de las reglas que permiten formar con los elementos de un conjunto finito, todos los grupos posibles que cumplan ciertas condiciones y a calcular el número de esos grupos. Su origen se remonta al siglo XVII y según E. Lucas, fué imaginado por Fermat y Pascal para poder resolver problemas de Cálculo de Probabilidades. Es de frecuente aplicación en muchos capítulos de Matemática pura y aplicada.

1. *Formar las variaciones monarias, binarias y ternarias con las cifras* 1, 2, 3 *y* 4.

R.: 1 , 2 , 3 , 4 ; 12 , 21 , 31 , 41 ; 123 , 213 , 312 , 412
13 , 23 , 32 , 42 ; 124 , 214 , 314 , 413
14 , 24 , 34 , 43 ; 132 , 231 , 321 , 421
134 , 234 , 324 , 423
142 , 241 , 341 , 431
143 , 243 , 342 , 432

2. *Formar las permutaciones de las letras M, N y P.*

R.: MNP ; MPN ; NMP ; NPM ; PMN ; PNM

3. *Formar las combinaciones monarias, binarias y ternarias de las cifras* 1, 2, 3 *y* 4.

R.: 1 , 2 , 3 , 4 ; 12 , 23 , 34 ; 123 , 234
13 , 24 124
14 ,

Calcular x sabiendo que:

4. $x = \mathcal{P}_7 + \mathcal{A}_{5,3} + \mathcal{C}_{10,6}$ R: 5310

5. $x = \mathcal{C}_{7,4} - \mathcal{P}_6 - \mathcal{A}_{5,3}$ R: −745

6. $x = 5\,\mathcal{P}_4 + 2\,\mathcal{C}_{6,3} - 3\,\mathcal{A}_{7,4}$ R: −2360

7. $x = 8\,\mathcal{P}_3 - 6\,\mathcal{C}_{5,4}$ R: 18

8. $x = \dfrac{5!}{4!}$ R: 5 **9.** $x = \dfrac{6!\,5!}{3!\,4!}$ R: 600

10. $x = \dfrac{n!}{(n-1)!}$ R: n **11.** $x = \dfrac{\mathcal{A}_{9,6}}{2\,\mathcal{A}_{10,5}}$ R: 1

12. $x = \dfrac{7\,\mathcal{C}_{10,8}}{\mathcal{C}_{10,5}}$ R: $\dfrac{5}{4}$ 13. $x = \dfrac{\mathcal{A}_{9,8}}{9\,\mathcal{P}_8}$ R: 1

14. $x = \binom{8}{5} + \binom{5}{3} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3}$ R: 73

15. $x = \binom{10}{0} + \binom{9}{0} \times \binom{8}{0} - \binom{7}{0} + \binom{6}{0}$ R: 1

16. $x = \binom{15}{2} + \binom{10}{9} + \binom{17}{0} + \binom{20}{20}$ R: 117

17. $x = \binom{8}{6} + \binom{8}{5}$ R: $\binom{9}{6}$ 18. $x = \binom{7}{4} + \binom{7}{3}$ R: $\binom{8}{4}$

19. $x = \binom{11}{4} + \binom{11}{5}$ R: $\binom{12}{5}$ 20. $x = \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1}$ R: $\binom{m+1}{n+1}$

Arreglos o variaciones simples.—21. *Cuatro personas entran en un coche de ferrocarril en el que hay 6 asientos disponibles, ¿de cuántas maneras distintas pueden ocuparlos?*

R.: De 360, es decir, de tantas maneras distintas como variaciones cuaternarias pueden hacerse con 6 elementos porque una manera de ocupar los bancos puede diferir de otra en un banco, por lo menos, o en el orden en que se los ocupe.

22. *¿Cuántos números distintos de 5 cifras diferentes, es decir no repetidas, pueden formarse con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9?*

R.: 15120, es decir, tantos como arreglos de quinto orden pueden hacerse con 9 elementos puesto que un número de 5 cifras puede diferir de otro ya sea en una de sus cifras, por lo menos, o en el orden con que figuren, cuando están formados por las mismas cifras. Ejem.: $12345 \neq 12346$ y $23451 \neq 34512$.

23. *¿Cuántos con las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9?* R.: 27 216.

En efecto, como el 0 no puede ocupar el primer lugar de la izquierda, el número buscado lo obtenemos restando al de grupos de 5 cifras cada uno tomadas de entre las 10 dadas que, de acuerdo con el razonamiento empleado en el ejercicio anterior, es $\mathcal{A}_{10,5}$, el de esos grupos que comienzan con 0 que son los que se obtienen anteponiendo esa cifra a los $\mathcal{A}_{9,4}$ que se pueden formar con las 9 cifras significativas tomadas de 4 en 4, luego dicho número buscado es

$$\mathcal{A}_{10,5} - \mathcal{A}_{9,4} = 10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6 - 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6 = 27\,216$$

24. *¿Cuántos pares, cuántas ternas y cuántas cuaternas pueden formarse con 50 números?* R: 2450 ; 117 600 ; 5 527 200

25. *¿De cuántas maneras puede ser descompuesta la suma $m + n + p + q + r + s$ en sumas parciales de tres sumandos cada una?* R.: 120.

26. *¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse 5 personas en 8 sillas?*

R: $\mathcal{A}_{8,5} = 6720$

27. *¿Cuántas señales telegráficas de 4 letras distintas cada una pueden hacerse con las 28 letras de nuestro alfabeto?* **R.: 491 400**

28. ***Si hay 10 vapores que hacen la carrera entre Buenos Aires y Rosario, ¿de cuántas maneras puede ir una persona del primer puerto al segundo y volver, viajando en vapores distintos?*** **R.: 90**

29. *¿Cuántos y cuáles son los diptongos que pueden formarse con las vocales a, i y u?* R.: 6 ; ai ; au ; ia ; iu ; ua ; ui

30. *¿Cuántos y cuáles son los números de 3 cifras cada uno, no repetidas, que pueden formarse con las cifras, 2, 3, 5 y 1?*

R: $\mathcal{A}_{4,3} = 24$; **235 , 325 , 523 , 723**
237 , 327 , 527 , 725
253 , 352 , 532 , 732
257 , 357 , 537 , 735
273 , 372 , 572 , 752
275 , 375 , 573 , 753

31. ***¿De cuántas maneras distintas pueden cubrirse 4 puestos de guardia con 6 soldados?*** **R.: 360**

32. ***¿Cuántos números de 3 cifras diferentes pueden formarse en el sistema de numeración decimal?*** **R.: 648**

33. ***Tres viajeros llegan a un pueblo donde hay 4 hoteles. ¿De cuántas maneras distintas pueden tomar sus habitaciones ubicándose en hoteles diferentes?*** **R.: 24**

34. ***¿De cuántas maneras distintas pueden sortearse 4 números de un bolillero que contiene 20 bolillas diferentemente numeradas?***

R.: 20.19.18.17. = 116 280

35. ***¿Cuántas señales distintas pueden hacerse desde un barco con 20 banderas de colores distintos, si se usan para cada señal 3 banderas de colores diferentes?*** R: $\mathcal{A}_{20,3} = 20 \,.\, 19 \,.\, 18 = 6480$

36. ***¿Cuántos números de 5 cifras cada uno, no repetidas, pueden formarse con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9? ¿Cuántos comienzan con 9? ¿Cuántos comienzan con 1 y terminan con 9?***

R: $\mathcal{A}_{9,5} = 15\,120$; $\mathcal{A}_{8,4} = 1680$; $\mathcal{A}_{7,3} = 210$

37. ***¿Cuántos números de 6 cifras, no repetidas, que empiecen con 4 y terminen con 2 pueden formarse con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9?***

R: $\mathcal{A}_{7,4} = 840$

38. ***¿Cuántos son los números menores que 1000 constituído cada uno por cifras no repetidas?*** **R.: 738**

En efecto: esos números son los que tienen 1, 2 y 3 cifras no repetidas, luego su número es

$$n = 10 + \mathcal{A}_{10,2} + \mathcal{A}_{10,3} - \mathcal{A}_{10,1} - \mathcal{A}_{9,2} = 10 + 90 + 720 - 10 - 72 = 783$$

Hemos restado los números que sólo aparentemente tienen 2 ó 3 cifras por que la primera es 0 (véase el ejercicio Nº 23).

39. *¿Cuántas banderas tricolores pueden formarse con los 7 colores fundamentales?* R: $2\ \mathscr{A}_{7,3} = 420$

(Multiplicamos por 2 porque con los mismos colores se forman banderas distintas según que esos colores se dispongan en franjas horizontales o verticales.)

40. *Idem si todos deben tener el color verde en el centro.* R.: 84

41. *¿Cuántas palabras de 5 letras no repetidas pueden formarse golpeando al azar las 27 teclas de una máquina de escribir de teclado universal español?* R: $\mathscr{A}_{27,5} = 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 9\,687\,600$

42. *Con 23 consonantes y 5 vocales ¿cuántas palabras pueden formarse en las que entren 2 consonantes y 3 vocales?* R.: $30\,369.120 = 3\,643\,200$

En efecto: hay $\mathscr{A}_{23,2} = 23 \times 22 = 506$ grupos de 2 consonantes

y $\mathscr{A}_{5,3} = 5.4.3 = 60$ grupos de 3 vocales

luego $\mathscr{A}_{23,2} \times \mathscr{A}_{5,3} = 506.60 = 30360$ es el número de grupos formados asociando cada grupo de 2 consonantes con cada grupo de 3 vocales. Luego si en cada grupo así formado hacemos las $5! = 120$ permutaciones posibles con las 5 letras que figuran en ellos resultan en total $30360 \times 120 = 3643200$ palabras de 2 consonantes y 3 vocales.

43. *Un estudiante posee 7 libros de Algebra y 3 de Geometría. ¿De cuántas maneras distintas puede disponer en un estante 4 libros de Algebra y 1 de Geometría colocando este último en medio de aquéllos?* R.: 2520

En efecto: los 7 libros de Algebra pueden agruparse de a 4 de

$$\mathscr{A}_{7,4} = 7.6.5.4 = 840 \text{ maneras distintas}$$

y al colocar en el medio de cada uno de esos grupos, sucesivamente cada uno de los 3 libros de Geometría, se tienen

$$\mathscr{A}_{7,4} \times 3 = 840 \times 3 = 2520 \text{ grupos distintos.}$$

Permutaciones simples.—44. *¿Cuántas permutaciones pueden formarse con las letras de la palabra MADRE? ¿Cuántas hay que empiezan con M? ¿Cuántas hay que empiezan con MA?* R.: $5! = 120$; $4! = 24$; $3! = 6$

45. *¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse al mismo tiempo 5 personas en un banco?*

R.: 120, es decir, de tantas como permutaciones pueden hacerse con 5 elementos, puesto que como deben sentarse *todas* las personas, una manera de hacerlo sólo podrá diferir de otra en el *orden* en que ocupen el banco.

46. *¿Cuántos números pueden obtenerse escribiendo una continuación de otra, de todas las maneras posibles, las 9 cifras significativas?* R.: $9! = 363\,880$

47. *¿Cuántos números, de 5 cifras, diferentes a 19 325 y diferentes entre sí pueden formarse con las cifras de este número?* R.: 119

48. *¿De cuántas maneras distintas pueden alinearse 9 personas? ¿Cuánto tiempo tardarían en ocupar esas posiciones si para cada una de ellas emplean 30 segundos?* R.: 362 880 ; 126 días

49. *¿Cuánto se tardaría en alinear 15 cartas diferentes si cada alineación insumiera 10 seg y se emplearan las 24 h del día para dedicarse a esa tarea?* R.: 420 420 años

50. *Para probar las aptitudes que tienen los 11 jugadores de un team de football, para los diversos puestos de juego, acuerdan en jugar cada Domingo en puestos distintos. ¿Cuánto tiempo necesitan para agotar todas las distribuciones posibles de los 11 jugadores en los 11 puestos?* R.: 767 630 años

51. *¿De cuántas maneras distintas pueden cubrirse 10 puestos de guardia con 10 soldados?* R.: $10! = 3\,628\,800$

52. *¿Cuántas señales distintas pueden hacerse con 5 banderas de colores diferentes al enarbolarlas todas en un mismo mástil?* R.: 120

53. *En la guarnición de una ciudad existen tropas de infantería, caballería ingenieros, artillería, aviación y motorizadas. Se desea organizar el desfile de las mismas, ¿de cuántas maneras distintas puede efectuarse? ¿De cuántas si se desea que la infantería encabece siempre el desfile? ¿De cuántas si la infantería encabeza, siempre, el desfile y lo cierran, siempre, las tropas motorizadas?* R.: 720 ; 120 ; 24

54. *Se conocen las cifras de un número telefónico y la característica de la estación pero no el orden en que figuran aquellas cifras en ese número. ¿Cuántas llamadas sería necesario hacer, a lo sumo, para que una de ellas correspondiera a dicho número? ¿Cuántas si se sabe con qué cifra comienza el número? ¿Cuántas si se sabe con cuál empieza y con cual termina?* R.: 24 ; 6 ; 2

55. *¿Cuántos disparos diferentes pueden efectuarse con una batería de 6 piezas, todas distintas, usándose todas las piezas, una después de otra, en cada disparo?* R.: 720

56. *¿Cuántos repiques diferentes pueden tocarse con 6 campanas, todas distintas, usándose todas una después de otra en cada repique?* R.: 720

57. *¿Cuántas permutaciones pueden formarse con las letras de la palabra PERMUTACION? ¿Cuántas comienzan con la letra P? ¿Cuántas empiezan con PER?* R.: $11! = 39\,916\,800$; $10! = 3\,628\,800$; $8! = 40\,320$

58. *Un matrimonio tiene 8 hijos de diferentes edades. Se conocen los nombres de los hijos e independientemente las edades de los mismos. ¿Cuántos ensayos habrá que hacer para que en uno de ellos figure el nombre y la correspondiente edad de cada uno?* R.: $8! = 40\,320$

60. *Las cifras de un número son* 1, 2, 3, 4 *y* 5. *¿Cuántos números diferentes pueden formarse con todas ellas, con la condición de que ninguno sea mayor que* 54 000?

R: $\mathcal{P}_5 - \mathcal{P}_3 = 5! - 3! = 120 - 6 = 114$ porque de los 5! números que se obtienen al escribir una a continuación de otra, y de todas las maneras posibles, las 5 cifras del número dado, resultan mayores que 54 000 los 3! números obtenidos al agregar, sucesivamente, a 54 los números formados por las cifras 1, 2 y 3 escritas una a continuación de otra, de todas las maneras posibles.

61. *Si se tienen dos obras de* 3 *volúmenes cada una y otras dos de* 2 *volúmenes cada una, ¿de cuántas maneras distintas pueden colocarse en un estante esos libros de modo que los volúmenes de una misma obra no estén separados?* R.: 3456

En efecto: Los volúmenes de la

1ª obra se pueden agrupar de $\mathcal{P}_3 = 3.2 = 6$ modos distintos
2ª " " " " " $\mathcal{P}_3 = 3.2 = 6$ " "
3ª " " " " " $\mathcal{P} = 2.1 = 2$ " "
4ª " " " " " $\mathcal{P}_2 = 2.1 = 2$ " "

y como cada uno de esos grupos considerados como un solo libro se pueden colocar de $\mathcal{P}_4 = 4.3.2.1 = 24$ modos distintos

el número buscado es $x = 6.6.2.2.24 = 3456$

62. *Si se forman ordenadamente las permutaciones de las cifras* 1, 2, 3, 4, 7 *y* 9 *¿qué lugar ocupa entre ellas el número* 432 917? R: El 419º

En efecto: La permutación pedida está precedida por

las que comienzan con 1 que son 5!
" " " " 2 " " 5!
" " " " 3 " " 5!
" " " " 41 " " 4!
" " " " 42 " " 4!
" " " " 431 " " 3!
" " " " 4321 " " 2!
" " " " 4327 " " 2!

luego preceden a la buscada

$$5! + 5! + 5! + 4! + 4! + 3! + 2! + 2! = 418$$

permutaciones, por lo tanto la dada ocupa el lugar 419º.

63. *Probar que la suma de los números que resultan de formar todas las permutaciones con las cifras* 1, 2, 3, 4 *y* 5 *es* 3 999 960.

En efecto: como cada cifra figura como unidad de cada uno de los 5 primeros órdenes tantas veces como permutaciones pueden hacerse con las restantes cifras, resulta que si descomponemos a los números formados en sus unidades de distinto orden y los sumamos, asociando los términos en los que figura una misma potencia de 10, se obtienen las sumas siguientes:

Unidades	$\mathcal{P}_4(1+2+3+4+5)$	$= 24 \times 15$	$=$ 360
Decenas	$\mathcal{P}_4(1+2+3+4+5).10$	$= 24 \times 15 \times 10$	$=$ 3600
Centenas	$\mathcal{P}_4(1+2+3+4+5).10^2$	$= 24 \times 15 \times 10^2$	$=$ 36000
Unid. de mil	$\mathcal{P}_4(1+2+3+4+5).10^3$	$= 24 \times 15 \times 10^3$	$=$ 360000
Dec. de mil	$\mathcal{P}_4(1+2+3+4+5).10^4$	$= 24 \times 15 \times 10^4$	$=$ 3600000

La suma pedida es pues 3999960

63. *¿Cuántas palabras pueden formarse con* n *vocales y* n *consonantes dadas, de modo que no haya dos vocales ni dos consonantes juntas?* R: $2(n!)^2$

En efecto: las n consonantes pueden disponerse de $n!$ maneras distintas. Intercalando entre ellas las n vocales, que también pueden disponerse de $n!$ maneras distintas, se obtienen

$$n!.n! = (n!)^2$$

grupos de n consonantes y n vocales. Si, en cambio, se escriben primero las vocales y luego las consonantes se obtienen en total los

$$2.(n!)^2 \text{ grupos pedidos.}$$

EJEMPLO: Si las consonantes son m y n y las vocales a y e resultan los $2(2!)^2 = 8$ grupos siguientes:

mane amen
mena eman
name anem
nema enam

64. *¿Cuántas permutaciones pueden hacerse con las letras de la palabra inglesa "DRAUGHT" de manera que las dos vocales queden siempre juntas?* R: 1440

En efecto: considerando a las vocales como a un solo elemento, las permutaciones posibles serían las de 6 letras, o sea

$$\mathcal{P}_6 = 6! = 720$$

y como las dos vocales pueden estar en el orden AU o en el inverso UA el número buscado es $\mathcal{P}_6 \times 2 = 720 \times 2 = 1440$

65. *Con las letras M, N, P, m, n, p ¿cuántas permutaciones pueden formarse? ¿Cuántas comienzan con mayúscula? ¿Cuántas comienzan y terminan con mayúscula?* R: 720 ; 360 ; 144

Inversiones en una permutación.—Si se ordenan previamente los elementos cuyas permutaciones se desean formar, se llama *permutación principal* aquella en la cual los elementos se suceden en el mencionado orden.

Así, por ejemplo, si se representan a los elementos por letras y se elige el orden alfabético, la permutación principal de las cinco primeras letras es ABCDE.

En toda otra permutación distinta de la principal, se dice que dos elementos están en *sucesión* o en *inversión*, según que estén en el *mismo* o en *distinto* orden, respectivamente, que en la permutación principal.

EJEMPLO: En la permutación BCADE están en sucesión

B y C ; B y D ; C y D ; C y E ; A y D ; A y E ; D y E

y están en *inversión* B y A ; C y A.

Para obtener el número de inversiones de una permutación se compara cada uno de sus elementos con cada uno de los que le siguen de izquierda a derecha y se suman los números de inversiones obtenidos para cada elemento.

EJEMPLO: La permutación DEACB tiene 7 inversiones que son

D y A ; D y C ; D y B ; E y A ; E y C ; E y B ; C y B

Se dice que una permutación es de *clase par* o *impar* según que sea par o impar, respectivamente, el número de sus inversiones.

EJEMPLOS: DEACB es de clase impar porque tiene 7 inversiones.

AEDCB es de clase par porque tiene 6 inversiones.

66. *Determinar la clase de las permutaciones*: DFECBA ; GDCFBAE ; ABCD ; 132865479 ; 314875269 ; 321.

R: impar ; impar ; par ; par ; impar ; impar

Combinaciones.—67. *¿Cuántos productos diferentes de 5 factores cada uno, no repetidos, pueden efectuarse con los números 7, 9, 11, 13 y 17?*

R: 10, es decir, tantos como combinaciones ternarias pueden hacerse con los 5 números dados, puesto que un producto debe diferir de otro en un factor, por lo menos, desde que esos productos no dependen del orden en que se tomen los factores.

68. *Un depósito de agua tiene 5 caños de desagüe que arrojan 1, 3, 5, 10 y 20 litros por minuto. Abriendo indistintamente 4 de esos caños, ¿en cuántos tiempos diferentes se puede desagotar el depósito?* R: 5

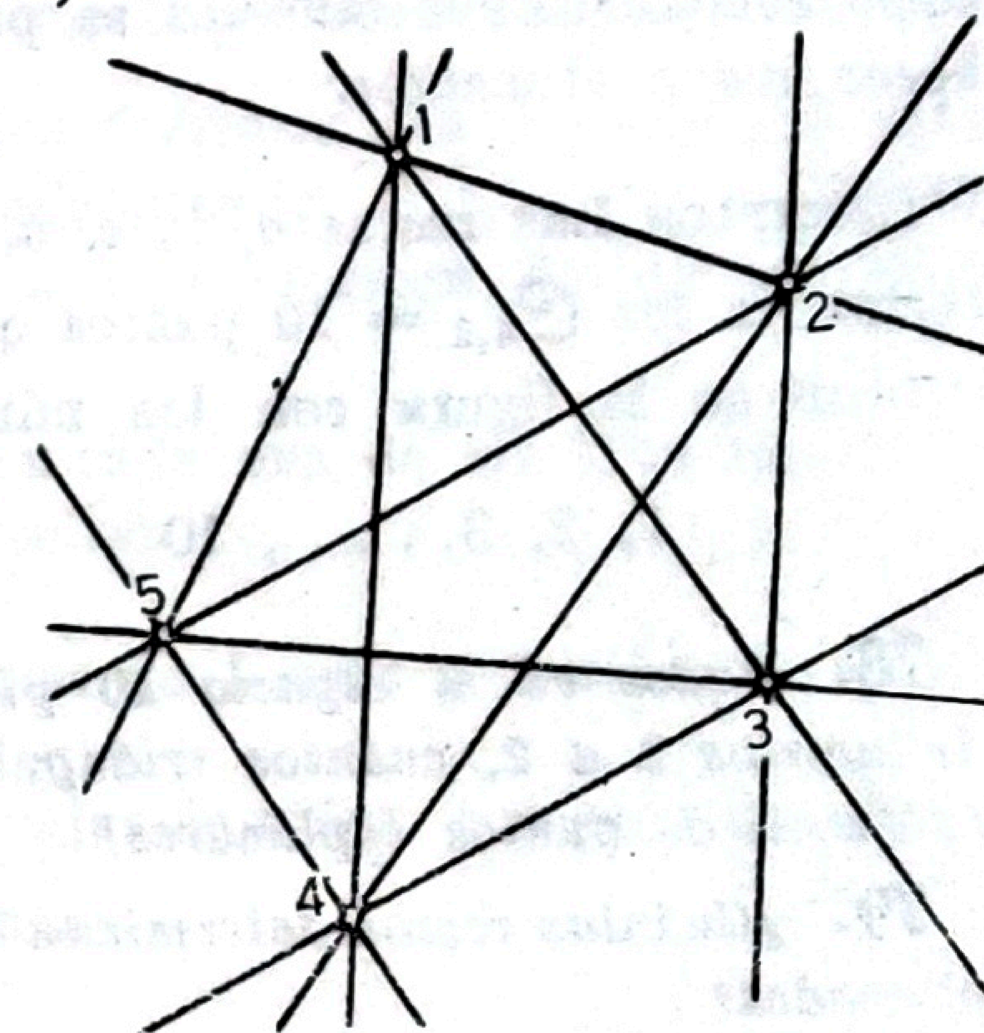
69. *¿Cuántas combinaciones ternarias pueden hacerse con las letras M, N, P, Q, R, S, si en ellas debe figurar la letra Q?* R: 15

70. *A una clase asisten 24 alumnos y todos los días dan la lección 2 alumnos. Si se desea que los dos alumnos no sean los mismos en ningún día, ¿durante cuánto tiempo se podrá conseguir eso?* R: 276 días

71. *¿Cuántas sumas diferentes de dos sumandos cada una pueden efectuarse con los números 7, 8, 9, 11, 15, 18 y 23?* R: 21

72. *¿Cuántos productos de 3 factores cada uno pueden efectuarse con esos mismos números?* R: 35

73. *Dados en el espacio n puntos* ($n \geq 3$) *tales que entre ellos no figure ninguna terna de puntos alineados, ¿cuántas rectas determinan?*



R: Tantas como combinaciones binarias pueden hacerse con los n puntos dados, puesto que dos puntos, distintos, determinan una recta a la cual pertenecen, cualquiera que sea el orden en que se los considere. Las rectas así obtenidas son todas distintas desde que de acuerdo con el enunciado, no existe ninguna terna de puntos alineados, luego el número buscado es $\frac{n(n-1)}{2}$

EJEMPLO: Si $n = 5$ el número de rectas que ellos determinan es $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ rectas, a saber: 1-2 ; 1-3 ; 1-4 ; 1-5 ; 2-3 ; 2-4 ; 2-5 ; 3-4 ; 3-5 y 4-5.

74. *¿Cuántas diagonales tiene un polígono convexo de n lados?*

R: $\frac{n(n-3)}{2}$

En efecto: a los $\frac{n(n-1)}{2}$ segmentos que según el ejercicio anterior determinan los n vértices del polígono, hay que descontar los n lados con lo que resulta: $Núm.\ de\ diag. = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)-2n}{2} = \frac{n(n-1-2)}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$

EJEMPLO: En la figura anterior se tienen las 5 diagonales 1-3 ; 1-4 ; 2-4 ; 2-5 y 3-5.

75. *Dados en el espacio n puntos* ($n \geq 4$) *tales que entre ellos no figuren ninguna cuaterna de puntos coplanares, ¿cuántos planos determinan?*

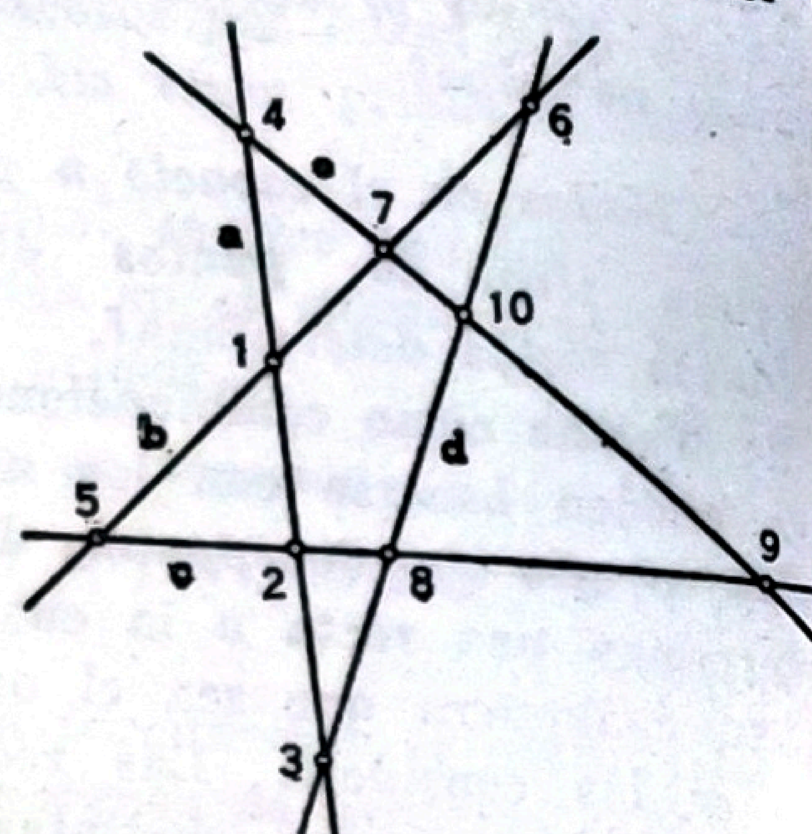
R: razonando como en el ejercicio Nº 73 resultan $\frac{n(n-1)\cdot(n-2)}{6}$

76. *Con 8 pesas distintas ¿cuántas pesadas diferentes pueden efectuarse tomando las pesas de 4 en 4 y colocándolas en un solo platillo?* R: 70

77. *¿En cuántos puntos se cortan n rectas de un plano dos cualesquiera de las cuales no son paralelas?*

R: $\frac{n(n-1)}{2}$

En efecto: como dos rectas coplanares no paralelas sólo pueden tener un punto común, independientemente del orden en que se las considere, resulta que ellas se cortan en tantos puntos como combinaciones binarias se pueden hacer con n elementos.



Ejemplos Las rectas a, b, c. d. e se cortan en los $C_{5,2} = 10$ puntos que se indican en la figura con los números

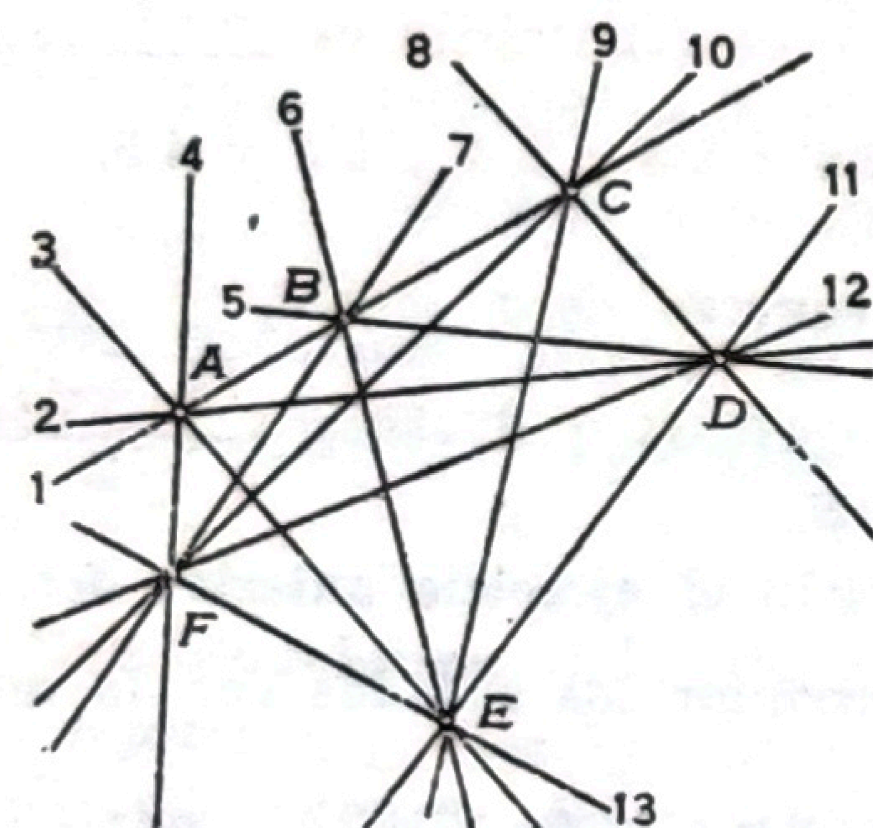
1, 2, 3, . . . , 10

78. *Dados en el espacio 10 puntos distintos, ¿cuántos segmentos resultan de unirlos 2 a 2, cuántos triángulos y cuántos tetraedros si no hay ninguna cuaterna de puntos coplanares?*

R: 45 ; 120 ; 210

79. *¿Cuántas rectas determinan 6 puntos de un plano si sólo 3 de ellos están alineados?*

R: 13

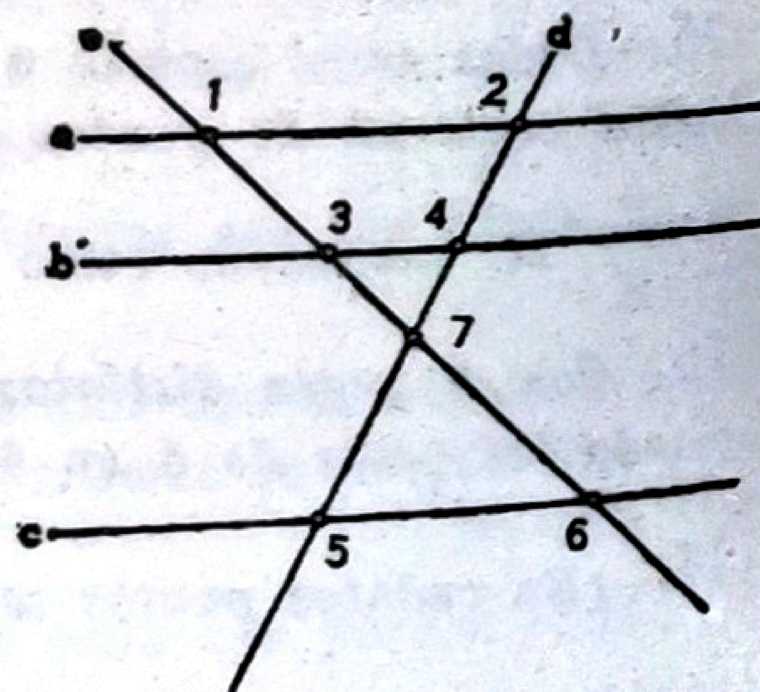


En efecto: si no hubiese ninguna terna de puntos alineados los 6 puntos dados determinarían tantas rectas como combinaciones binarias pueden hacerse con 6 elementos (ejercicio Nº 73) o sea 15 rectas. A ese número hay que restarle el de rectas superpuestas que determinan los 3 puntos alineados, número igual al de combinaciones binarias de 3 elementos, o sea 3, y sumarle 1 para considerar la recta que contiene a los 3 puntos alineados, así resulta

$$15 - 3 + 1 = 13.$$

80. *¿Cuántos puntos determinan 5 rectas de un plano si tres de ellas son paralelas y 3 cualesquiera de ellas no pasan por el mismo punto?*

R: 7 puntos, porque a los $C_{5,2} = 10$ puntos que determinarían esas rectas consideradas 2 a 2 si no hubiese entre ellas rectas paralelas, es decir, que no se cortan, debemos restarles los $C_{3,2} = 3$ puntos que determinarían las 3 rectas paralelas si no lo fueran. De esa manera



resulta $C_{5,2} - C_{3,2} = 10 - 3 = 7$

81. *¿Cuántas pesadas distintas pueden hacerse con 6 pesas desiguales colocando en cada pesada las pesas que se utilizan en un solo platillo?*

R: tantas como $C_{6,1} + C_{6,2} + C_{6,3} + C_{6,4} + C_{6,5} + C_{6,6} = 63$

82. *¿Cuántas aleaciones pueden hacerse con 10 metales distintos?* R: 1013

83. *¿Cuántos grupos de 4 personas pueden formarse con 5 niños y 7 niñas debiendo haber por lo menos un niño en cada grupo?* R: 460

En efecto: los grupos posibles son los que se forman de las siguientes maneras:

a) Agrupando cada una de los 5 niños con cada una de las $C_{7,3}$ ternas que pueden formarse con las 7 niñas, luego resultan

$$5\, C_{7,3} = 5 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 35 = 175 \text{ grupos de } \textit{1 niño y 3 niñas}$$

b) Agrupando cada una de las $C_{5,2}$ parejas de niños con cada una de las $C_{7,2}$ parejas de niñas, con lo que se obtienen

$$C_{5,2} \cdot C_{7,2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 10 \cdot 21 = 210 \text{ grupos de } \textit{2 niños y 2 niñas}$$

c) Agrupando cada una de las $C_{5,3}$ ternas que pueden formarse con los 5 niños con cada una de las 7 niñas. Así se obtienen

$$C_{5,3} \cdot 7 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 7 = 10 \cdot 7 = 70 \text{ grupos de } \textit{3 niños y 1 niña}$$

d) Formando todas las cuaternas posibles con los 5 niños por que en cada grupo no es necesario que figure alguna niña. Así resultan

$$C_{5,4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \text{ grupos de } \textit{4 niños}$$

Luego el total de grupos buscados es

$$175 + 210 + 70 + 5 = 460$$

84. *En un plano 3 rectas paralelas son cortadas por otras 4 paralelas entre sí, ¿cuántos paralelogramos se forman?* R: $C_{3,2} \cdot C_{4,2} = 18$

85. *¿Cuántos ángulos convexos forman 7 semirrectas del mismo origen dos cualesquiera de las cuales no son opuestas?* R: 21

Miscelánea de ejercicios y problemas. — 86. *Determinar el número m sabiendo que el número de arreglos de m objetos tomados de 3 en 3 es igual a 240 veces el número m.* R: $m = 17$

87. *Hallar el número n sabiendo que el cuádruplo del número de arreglos ternarios de n objetos es igual al quíntuplo del número de arreglos ternarios de n-1 objetos.* R: $n = 15$

88. *¿Cuál es el polígono en el cual el número de diagonales es: a) igual al de lados; b) es el duplo del número de lados?* (Téngase presente el resultado del ejercicio Nº 74).

R: a) pentágono; b) eptágono

89. *Hallar x sabiendo que:* a) $\mathcal{C}_{x.3} = \mathcal{C}_{x.2}$; b) $6\,\mathcal{C}_{x,3} + 8\,\mathcal{C}_{x,5} = \mathcal{A}_{x,4}$

R: a) $x = 5$; b) $x = 18$

90. *Calcular n de modo que resulte* $\mathcal{A}_{15,n} = 10\,\mathcal{A}_{15,n-1}$ R: $n = 6$

91. *Hallar x sabiendo que* $\dfrac{\mathcal{C}_{x,5}}{\mathcal{C}_{x,6}} = \dfrac{2}{3}$ R: $x = 14$

92. *Probar que* $2\,\mathcal{P}_n - (n-1)\,\mathcal{P}_{n-1} = \mathcal{P}_n + \mathcal{P}_{n-1}$

93. *Hallar n sabiendo que:* $\mathcal{A}_{19,n} = 5814$ R: $n = 3$

94. *El producto de n números naturales consecutivos es divisible por el producto de los n primeros números naturales distintos de 0. ¿Por qué?*

Porque

$$m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-n+1) = \mathcal{A}_{m,n} \qquad (1)$$

y

$$n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 3\,.\,2\,.\,1 = n\,! = \mathcal{P}_n \qquad (2)$$

luego $\dfrac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-n+1)}{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 3\,.\,2\,.\,1} = \dfrac{\mathcal{A}_{m,n}}{\mathcal{P}_n}$ y como $\dfrac{\mathcal{A}_{m,n}}{\mathcal{P}_n} = \mathcal{C}_{m,n}$

y este es un número natural resulta que el cociente de (1) por (2) es exacto, vale decir, que (1) es divisible por (2).

EJEMPLO: $13.14.15.16 = \mathcal{A}_{16,4}$ es divisible por $1.2.3.4 = 4\,! = \mathcal{P}_4$ y el cociente es

$$\mathcal{C}_{16,4} = 1820$$

Arreglos con repetición. — Dados *m* elementos distintos se llaman *arreglos o variaciones con repetición* de esos *m* elementos tomados de *n* en *n*, o de orden *n*, a cada uno de los conjuntos ordenados de *n* elementos cada uno, que se pueden formar con esos *m* elementos dados de modo que en cada conjunto entren *n* de ellos, distintos o repetidos, y que dos cualesquiera de esos conjuntos difieran en un elemento, al menos, o en el orden de los objetos diferentes o en el número de los que se repiten.

El número *n* puede ser menor, igual o mayor que *m*.

EJEMPLOS: Con las letras A y B pueden formarse los arreglos binarios con repetición AA, AB, BA, BB en total $\mathcal{A}'_{2,2} = 2^2 = 4$

Las variaciones ternarias con repetición de esas mismas letras son:

(*) AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB, en total $\mathcal{A}'_{2,3} = 2^3 = 8$

(*) Véase en el Apéndice el ejemplo de pág. 254.

Puede demostrarse que lo observado en los ejemplos anteriores no es casual, vale decir, que:

El número de arreglos con repetición de orden n de m elementos es igual a la potencia enésima de m.

En símbolos: $\mathcal{A}'_{m,n} = m^n$

EJEMPLOS: $\mathcal{A}'_{2,5} = 2^5 = 32$; $\mathcal{A}'_{5,5} = 5^5$; $\mathcal{A}'_{10,4} = 10^4 = 10\,000$

95. *¿De cuántas maneras pueden echarse dos cartas en 6 buzones distintos?* R: 64

96. *¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse con las 9 cifras significativas?* R: $\mathcal{A}_{9,3} = 9^3 = 729$

97. *¿Cuántos números distintos de tres cifras se pueden formar en el sistema de numeración decimal?* R: 900

En efecto: Los grupos de 3 cifras cada uno que se pueden formar con los 10 dígitos son $\mathcal{A}'_{10,3} = 10^3$

pero de esos grupos hay que eliminar los que empiezan con 0 y 00 porque no son números de tres cifras y como ellos se obtienen anteponiendo un 0 a los $\mathcal{A}'_{10,2} = 10^2$ tendremos:

$$N^{\circ} \text{ de números de 3 cifras} = 10^3 - 10^2 = 10^2\,(10-1) = 900$$

Análogamente se prueba que el

$$N^{\circ} \text{ de números de } n \text{ cifras} = 10^n - 10^{n-1} = 10^{n-1}(10-1) = 9\overbrace{00\ldots0}^{n}$$

98. *¿Cuántos números de 5 cifras hay en el sistema de base 4?* R: 768

Efectivamente, como en dicho sistema sólo se dispone de los signos 0, 1, 2, 3, para formar números de 5 cifras es necesario repetir alguna de ellas. Además como dos grupos de cifras representan números distintos si están ordenados en forma distinta; los grupos de cifras que son números de 5 cifras son las variaciones con repetición de 4 cifras tomadas de 5, en 5, o sea:

$$V' = 4^5$$

pero entre esos grupos figuran los comprendidos entre 00000 y 03333 que no son números de 5 cifras, y cuyo número es el variaciones cuaternarias con repetición de 4 elementos, ya que basta anteponer un 0 a cada una de ellas para obtener un grupo de 5 cifras. Luego

$$N^{\circ} \text{ de nos. de 5 cifras en el sist. cuater.} = 4^5 - 4^4 = 4^4\,(4-1) = 4^4 \times 3 = 768$$

99. *¿Cuántos números distintos de 6 cifras se pueden formar con las 5 primeras cifras de modo que todos empiecen y terminen con 1?* R 625

En efecto: Como no se nos fija cuáles son la primera y la última cifra basta colocar entre ellas otras cuatro de las 5 dadas repetidas o no; con lo que resulta que el número buscado es $\mathcal{A}'_{5,4} = 5^4 = 625$

Permutaciones con repetición. — Dados m elementos entre los cuales haya α iguales entre sí, β iguales entre sí pero a los precedentes, etc., y finalmente λ iguales entre sí pero no a los precedentes, se denomina *permutación de esos elementos con repetición* a cada uno de los conjuntos ordenados que se pueden formar con *todos* ellos de modo que dos cualesquiera de dichos conjuntos difieran, únicamente, en el orden de los elementos distintos que los componen.

EJEMPLO: Con las letras A, A y B se forman las permutaciones con repetición AAB, ABA y BAA, en total $\mathcal{P}_3^2 = \dfrac{3!}{2!} = 3$.

Con las letras A, A, B y B se forman las permutaciones con repetición AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA en total $\mathcal{P}_4^{(2,2)} = \dfrac{4!}{2!\,2!} = 6$.

Lo observado en estos ejemplos son casos particulares del teorema que dice: *El número de permutaciones con repetición de m elementos entre los cuales hay α iguales entre sí, β iguales entre sí pero no a los precedentes, etc., λ iguales entre sí pero no a los precedentes, es igual al cociente entre el número de permutaciones que pueden hacerse con m elementos diferentes y el producto de los números de las que pueden hacerse con α elementos diferentes, β elementos diferentes, etc., λ elementos diferentes.*

En símbolos: $\mathcal{P}_m^{(\alpha,\beta,\ldots,\lambda)} = \dfrac{m!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!}$

EJEMPLO: $\mathcal{P}_7^{(3,2)} = \dfrac{7!}{3!\,2!} = \dfrac{7.6.5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1} = 420$

100. *En una urna hay 5 bolillas blancas, 4 rojas y 3 verdes. ¿De cuántas maneras distintas pueden ser extraídas de la urna una por una?* R: 138 600

101. *Formar todas las permutaciones posibles con los objetos representados por las letras AABB.*

Designamos a una A con A′ y a una B con B′ y formamos las permutaciones de los cuatro elementos diferentes A, A′, B y B′ así diferenciados, que son:

A A′B B′	B A A′B′	A′A B B′	B′A A′B
A A′B′B	B A B′A′	A′A B′B	B′A B A′
A B A′B′	B A′A B′	A′B A B′	B′B A A′
A B B′A′	B A′B′A	A′B B′A	B′B A′A
A B′A′B	B B′A A′	A′B′A B	B′A′A B
A B′B A′	B B′A′A	A′B′B A	B′A′B A

Suprimimos los ápices que colocamos en una A y en una B para diferenciarlas de las otras, se tiene

A A B B	B A A B	A A B B	B A A B
A A B B	B A B A	A A B B	B A B A
A B A B	B A A B	A B A B	B B A A
A B B A	B A B A	A B B A	B B A A
A B A B	B B A A	A B A B	B A A B
A B B A	B B A A	A B B A	B A B A

y eliminando las permutaciones repetidas nos quedan las 6 que son diferentes

A A B B; A B A B; A B B A; B A A B; B A B A; B B A A

102. *Con las 9 cifras significativas entre las cuales sólo la cifra 3 se repite se han formado 504 números distintos de 9 cifras cada uno. ¿Cuántas veces está repetido el 3?*

SOLUCIÓN: Si $504 = \dfrac{9!}{x!} = \dfrac{9.8.7.6.5.4.3.2.1}{x!} =$

es $x! = \dfrac{9.8.7.6.5.4.3.2.1}{504} = 6.5.4.3.2.1$

o sea $x! = 6!$ luego es $x = 6$

103. *¿Cuántos números distintos de 6 cifras cada uno pueden formarse con las cifras del 444 115? ¿Cuántos con las del 223 330?* R: *a*) 60; *b*)

SOLUCIÓN: *b*) $x = \mathcal{P}_6^{(3,2)} - \mathcal{P}_5^{(2,3)} = \dfrac{6!}{2!\,3!} - \dfrac{5!}{2!\,3!} = 60 - 10 = 50$

104. *¿Cuántos números distintos pueden formarse con las cifras del número 4445579 interviniendo en cada uno de ellos todas esas cifras?* R: 420

105. *¿De cuántas maneras distintas pueden ser distribuidos entre 15 niños 5 monedas de 10 cts., 6 de 20 cts. y 4 de 5 cts., de manera que cada niño reciba una moneda?* R: 630 630

106. *¿De cuántas maneras distintas pueden disponerse en un estante 12 libros, 6 de los cuales son verdes, 4 rojos y 2 azules?* R: 13 860

107. *¿Cuántos grupos de 10 letras cada uno pueden formarse con las letras de la palabra PROPORCION?* R: 151 200

108. *¿Cuántas permutaciones distintas pueden hacerse con las letras de la palabra DIVISIBILIDAD?* R: 7 094 200

901. *Formar las permutaciones con las letras AABBCCC.* R 210

Procédase en forma análoga a la que se siguió para resolver el ejercicio número **102.**

Combinaciones con repetición.— Dados m elementos distintos, se denomina *combinaciones con repetición de orden n* de esos m elementos a los grupos de n elementos cada uno, iguales o distintos, tomados de entre los iguales a los m dados y considerando como distintos a dos de esos grupos cuando difieren en un elemento, por lo menos, o en el número de los que se repiten cuando están formados por los mismos elementos.

EJEMPLOS: Con las letras A, B, C, y D se pueden formar las combinaciones binarias con repetición

AA ; BB ; CC ; DD en total $\mathcal{C}'_{4,2} = \mathcal{C}_{4+2-1,2} = 10$
AB ; BC ; CD
AC ; BD
AD

En general puede demostrarse que

El número de combinaciones con repetición de orden n de m elementos, es igual al número de combinaciones simples de orden n de $m + n - 1$ elementos.

En símbolos: $\mathcal{C}'_{m,n} = \mathcal{C}_{m+n-1,n} = \binom{m+n-1}{n}$

EJEMPLOS:

$$\mathcal{C}'_{4,3} = \mathcal{C}_{4+3-1,3} = \binom{6}{3} = 20 \; ; \; \mathcal{C}'_{4,6} = \mathcal{C}_{9,6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$$

110. *¿Cuántos son los números de 5 cifras significativas en los cuales cada cifra no sea mayor que cada una de las siguientes?* R: $\mathcal{C}'_{9,5} = 1287$

111. *¿Cuántas banderas de 3 fajas se pueden formar con los 7 colores fundamentales si pueden tener 2 ó 3 fajas del mismo color pero no puede haber 2 banderas que contengan los mismos colores?*

112. *¿Cuántas y cuáles son las soluciones naturales de la ecuación $x + y + z + v = 3$.*

SOLUCIÓN: Tiene $\mathcal{C}'_{4,3} = \mathcal{C}_{6,3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ soluciones que son:

$3+0+0+0 = 0+3+0+0 = 0+0+3+0 = 0+0+0+3 = 2+1+0+0 =$
$= 2+0+1+0 = 2+0+0+1 = 0+2+1+0 = 0+2+0+1 = 0+0+2+1 =$
$= 1+2+0+0 = 1+0+2+0 = 1+0+0+2 = 1+1+1+0 = 1+0+1+1 =$
$= 1+1+0+1 = 0+1+1+1 = 0+1+0+2 = 0+0+1+2 = 0+1+2+0$

113. *¿Cuántos términos tiene un polinomio homogéneo de grado m de n variables?*

SOLUCIÓN: Tiene $\mathcal{C}'_{n,m} = \mathcal{C}_{n+m-1,m} = \binom{n+m-1}{m}$

Ejm.: Un polinomio de 5° grado en x e y tiene

$$\mathcal{C}'_{2,5} = \mathcal{C}_{6,5} = \binom{6}{5} = 6$$

cuyas partes literales son, respectivamente

$xxxxx = x^5$
$xxxxy = x^4y$
$xxxyy = x^3y^2$
$xxyyy = x^2y^3$
$xyyyy = x\,y^4$
$yyyyy = y^5$

114. *¿Cuántos puntos distintos pueden obtenerse al arrojar 2 dados?* $\mathcal{C}'_{6,2} = \mathcal{C}_{7,2} = 20$

115. *¿Cuántas sumas distintas de 3 sumandos cada una pueden hacerse con las cifras 0, 1, 2, 3, 4, ... 9?* $\mathcal{C}'_{10,3} = \mathcal{C}_{12,3} = 220$

BINOMIO DE NEWTON (*)

El desarrollo de la potencia de un binomio para cualquier valor natural del exponente o, por lo menos, algún procedimiento para calcular los coeficientes de los términos de ese desarrollo, era conocido, según D. E. Smith, mucho antes en Oriente de que lo fuese en Europa. Euclides lo conocía para el exponente 2, pero sólo se encuentran evidencias de su generalización para otros valores del exponente en el Algebra de Omar Khayyam (persa), quien, si bien no indica el procedimiento, afirma que puede hallar raíces cuartas, quintas, sextas, y aún mayores, de un número por procedimientos aritméticos no empleados anteriormente. Se debe a I. Newton la generalización del teorema del binomio para exponentes negativos y fraccionarios.

I. *Efectuar, directamente, los siguientes productos:*

1. $(a+5)(a+6)$ R: $a^2+(5+6)\,a+5\,.\,6=a^2+11\,a+30$

2. $(x+1)(x+3)$ R: $x^2+(1+3)\,x+1\,.\,3=x^2+4\,x+3$

3. $(z+10)(z+5)$ R: $z^2+15\,z+50$

4. $(a+4)(a+6)$ R: $a^2+10\,a+24$

5. $(x+1)(x-3)$ R: $x^2+(1-3)\,x+1\,.-3=x^2-2\,x-3$

6. $(a-5)(a+6)$ R: a^2+a-30

7. $(a-4)(a-6)$ R: $a^2+(-4-6)\,a+(-4\,.-6)=a^2-10\,a+24$

8. $(1-m)(3-m)=1\,.\,3-(1+3)\,m+m^2=3-4\,m+m^2$

9. $(3-y)(5-y)$ R: $15-8\,y+y^2$

10. $\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{3}{4}\right)$ R: $a^2+\frac{5}{4}a+\frac{3}{8}$

11. $(x+0{,}5)(x+1{,}5)$ R: $x^2+2\,x+0{,}75$

12. $\left(\frac{1}{3}+x\right)\left(-\frac{5}{6}+x\right)$ R: $-\frac{5}{18}-\frac{1}{2}x+x^2$

(*) Para los alumnos de las Escuelas Nacionales de Comercio e Industriales.

13. $(2\,a+5)(2\,a-1)$ R: $4\,a^2+8\,a-5$

14. $(-1+3\,a)(4+3\,a)$ R: $-4+9\,a+9\,a^2$

15. $(2\,a^2-5)(2\,a^2+7)$ R: $4\,a^4+4\,a^2-35$

16. $\left(\frac{1}{2}a^2b^3+2\right)\left(\frac{1}{2}a^2b^3-5\right)$ R: $\frac{1}{4}a^4b^6-\frac{3}{2}a^2b^3-10$

17. $(a+1)(a+2)(a+3)$ R: $a^3+(1+2+3)\,a^2+(1.2+1.3+2.3)\,a+$ $+1.2.3=a^3+6\,a^2+11\,a+6$

18. $(x+5)(x+2)(x+1)$ R: $x^3+8\,x^2+17\,x+10$

19. $(b-1)(b-2)(b-3)$ R: $b^3-6\,b^2+11\,b-6$

20. $(b-1)(b+2)(b-3)$ R: $b^3-2\,b^2-5\,b+6$

21. $(1-x)(-4+x)(3+x)$ R: $-12-11\,x+2\,x^2+x^3$

22. $(2\,a+1)(2\,a-1)(2\,a-3)$ R: $8\,a^3-12\,a^2-2\,a+3$

23. $(x^2+2)(x^2-3)(x^2+1)$ R: $x^6-7\,x^2-6$

24. $(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)$ R: $a^4+10\,a^3+35\,a^2+50\,a+24$

25. $(x-1)(x+2)(x+1)(x-2)$ R: $x^4-5\,x^2+4$

26. $(x+5)(x-2)(x-3)(x+1)(x-1)$ R: $x^5-20\,x^3+30\,x^2+19\,x-30$

27. $\left(m-\frac{1}{3}\right)\left(m-\frac{2}{3}\right)(m+1)$ R: $m^3-\frac{7}{9}m+\frac{2}{9}$

28. $(n-2)\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)$ R: $n^3-\frac{13}{4}n-\frac{3}{2}$

29. $(2-m)\left(\frac{3}{2}+m\right)\left(\frac{1}{4}-m\right)$ R: $m^3-\frac{3}{4}m^2-\frac{23}{8}m+\frac{3}{4}$

En efecto: $(2-m)\left(\frac{3}{2}+m\right)\left(\frac{1}{4}-m\right)=[-(m-2)]\left(m+\frac{3}{2}\right)\left[-\left(m-\frac{1}{4}\right)\right]=$

$$=(m-2)\left(m+\frac{3}{2}\right)\left(m-\frac{1}{4}\right)$$

30. $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)(x-3)(x+1)$ R: $x^4-\frac{9}{2}x^3+3\,x^2+\frac{11}{2}x-3$

31. $(x+0{,}5)(x-0{,}1)(x+0{,}2)(x+0{,}1)$ R: $x^4+0{,}7\,x^3+0{,}09\,x^2-0{,}007\,x-0{,}001$

32. $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ R: $x^4-5\,x^2+6$

33. $(x+i)(x-i)(x-1)(x+1)$ R: x^4-1

Triángulo aritmético de Pascal. — Se llama así un ingenioso esquema atribuído por muchos al matemático y físico francés Blas Pascal y por otros al italiano Nicolás Fontana más conocido por Tartaglia (tartamudo), debido a esa particular manera de hablar ocasionada por una herida que le produjo un soldado francés. También se dice que mucho antes era conocido por los chinos. Ese esquema permite obtener los números combinatorios de órdenes y numeradores consecutivos para lo cual basta disponerlos como se indica a continuación:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
....
....
$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \cdots \binom{n}{n-1} \cdots \binom{n}{n}$$
....
....

Si se tiene en cuenta que los números combinatorios con los que empieza y termina cada fila son iguales a 1 por ser números de orden 0, y de orden igual a su numerador, respectivamente, y los restantes igual a la suma de los dos que tiene encima (ejercicio Nº 20 de pág. 163), resultan los siguientes valores para los números combinatorios escritos anteriormente.

```
                  1                          o también  1
               1     1                                  1  1
            1     2     1                               1  2  1
         1     3     3     1                            1  3  3  1
      1     4     6     4     1                         1  4  6  4  1
   1     5    10    10     5     1                      1  5  10  10  5  1
1     6    15    20    15     6     1                   1  6  15  20  15  6  1
...................................                     ..................
...................................                     ..................
...................................                     ..................
```

El primer triángulo se obtiene escribiendo el número 1, debajo y a ambos lados del mismo otra vez 1; en la tercera fila se comienza por escribir 1, luego 2 que es la suma de los 1 de la segunda fila y se lo coloca entre ellos y se

termina esa fila con 1. La cuarta fila comienza con 1, sigue con 3, suma del primer 1 de la tercera fila con el 2 que le sigue, resultado que se coloca en la cuarta fila entre esos sumandos; a continuación se escribe otro 3, suma del 2 de la tercera fila con el 1 que está a su derecha en esa fila, resultado que se escribe en la cuarta fila entre los números sumados; y en la misma forma se continúa para obtener los demás números del primer triángulo. El segundo triángulo se obtiene en forma análoga colocando, a partir de la segunda fila, cada suma parcial debajo del segundo de los sumandos que figuran en ella.

Por la forma en que se ha ideado el cuadro resulta que:

Los números que figuran en una fila del triángulo de Pascal son los sucesivos coeficientes del desarrollo de la potencia de un binomio cuyo exponente es igual al orden de esa fila menos 1, o sea al segundo de los números que figuran en esa fila, contando de izquierda a derecha.

Recíprocamente: *los coeficientes de los sucesivos términos del desarrollo de una potencia de exponente natural de un binomio son los números del triángulo de Pascal que se encuentran en la fila que contiene como segundo número al exponente de esa potencia.*

EJEMPLOS: Los números 1, 2, 1 son los coef. de los térm. de $(a+b)^2$
" " 1, 3, 3, 1 " " " " " " " $(a+b)^3$

Recíprocamente: los coeficientes de los términos del desarrollo de $(a+b)^5$ están en la 6ª fila donde figura como segundo número el 5. Esos coeficientes son: 1, 5, 10, 10, 5, 1 y el mencionado desarrollo

$$(a+b)^5 = a^5 + 5\,a^4 b + 10\,a^3 b^2 + 10\,a^2 b^3 + 5\,a\,b^4 + b^5$$

Si se tratara de un binomio diferencia los coeficientes del desarrollo de una de sus potencias de exponente natural se toman del triángulo en la forma indicada y se los coloca en el desarrollo alternadamente con el signo + y —.

$$(a-b)^5 = a^5 - 5\,a^4 b + 10\,a^3 b^2 - 10\,a^2 b^3 + 5\,a\,b^4 - b^5$$

Los números que figuran en los lados paralelos a los formados por números 1, son los coeficientes de los términos del desarrollo de la potencia del binomio diferencia de exponente negativo de valor absoluto igual al segundo de los números que figuran en las mencionadas paralelas.

Así: los coef. del desarrollo de $(a-b)^{-2}$ son 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; . . .
" " " " " $(a-b)^{-3}$ " 1 ; 3 ; 6 ; 10 ; 15 ; . . .
....

luego $(a-b)^{-2} = a^{-2}+2\,a^{-3}\,b+3\,a^{-4}\,b^2+ 4\,a^{-5}\,b^3+ 5\,a^{-6}\,b^4+6\,a^{-7}\,b^5+ \dots$

$(a-b)^{-3} = a^{-3}+3\,a^{-4}\,b+6\,a^{-5}\,b^2+10\,a^{-6}\,b^3+15\,a^{-7}\,b^4+ \dots$

El triángulo de Pascal nos permite apreciar clara y fácilmente que el desarrollo de una potencia de exponente natural de un binomio tiene un número *determinado de términos* (los que están en la fila donde figura el exponente de esa potencia), mientras que el desarrollo de una potencia de exponente entero negativo tienen *infinitos términos* (los que están en la paralela a los lados extremos que contiene al valor absoluto del exponente de esa potencia).

1. *Escribir las 10 primeras filas del triángulo de Pascal.*

2. *Escribir empleando el triángulo de Pascal el desarrollo de las potencias siguientes:* $(a+b)^4$; $(a+b)^5$; $(a+b)^7$; $(a+b)^8$

3. *Escribir empleando el triángulo de Pascal los 5 primeros términos de las potencias:* $(a-b)^{-4}$; $(a-b)^{-5}$; $(a-b)^{-6}$; $(a-b)^{-8}$; $(a-b)^{-9}$

4. *Probar que la suma de los números combinatorios del mismo numerador y de órdenes consecutivos desde 0 hasta el de orden igual al numerador es la potencia del número 2 de exponente igual a ese numerador.*

En símbolos: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$

En efecto; siendo

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

para cualquier valor de a y de b, resulta que para $a=b=1$ es

$$(1+1)^n=\binom{n}{0}1^n+\binom{n}{1}1^{n-1}.1+\binom{n}{2}1^{n-2}.1^2+\ldots+\binom{n}{n-1}1.1^{n-1}+\binom{n}{n}1^n$$

y como todas las potencias de 1 son iguales a 1, resulta

$$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$$

5. *Calcular la suma de los números de combinaciones de 7 objetos tomados de 1 en 1, de 2 en 2, de 3 en ....., de 7 en 7.* R: $2^7-1=127$

6. *Las potencias* 2^a, 3^a *y* 4^a *del número 11 tienen por cifras a los coeficientes del desarrollo de la potencia del binomio de exponente 2, 3 y 4, respectivamente.*

En efecto:

$11^2=(1.10+1)^2=1.10^2+2.10.1+1^2=1.10^2+2.10+1=121$

$11^3=(1.10+1)=1.10^3+3.10^2.1+3.10.1^2+1^3=1.10^3+3.10^2+3.10+1=1331$

7. *Utilizar la propiedad anterior y el triángulo de Pascal para calcular directamente la potencia cuarta de 11.* R: 14 641

II. *Desarrollar las potencias siguientes:*

1. $(a\pm b)^5$ R: $a^5\pm5a^4b+\frac{5.4}{2}a^3b^2\pm\frac{5.4.3}{2.3}a^2b^3+5ab^4\pm b^5$
$=a^5\pm5a^4b+10a^3b^2\pm10a^2b^3+5ab^4\pm b^5$

2. $(a\pm b)^4$ R: $a^4\pm4a^3b+6a^2b^2\pm4ab^3+b^4$

3. $(a\pm b)^9$ R: $a^9\pm9a^8b+36a^7b^2\pm84a^6b^3+126a^5b^4\pm$
$\pm126a^4b^5+84a^3b^6\pm36a^2b^7+9ab^8\pm b^9$

4. $(x\pm y)^7$ R: $x^7\pm7x^6y+21x^5y^2\pm35x^4y^3+35x^3y^4\pm$
$\pm21x^2y^5+7xy^6\pm y^7$

5. $(x\pm y)^6$ R: $x^6\pm6x^5y+15x^4y^2\pm20x^3y^3+15x^2y^4\pm6xy^5+y^6$

6. $(m\pm n)^8$ R: $m^8\pm8m^7n+28m^6n^2\pm56m^5n^3+70m^4n^4\pm$
$\pm56m^3n^5+28m^2n^6\pm8mn^7+n^8$

7. $(a\pm3)^5$ R: $a^5\pm5a^4.3+10a^3.3^2\pm10a^2.3^3+5a.3^4\pm3^5=$
$=a^5\pm15a^4\pm90a^3+270a^2\pm405a+243$

8. $(x\pm1)^6$ R: $x^6\pm6x^5+15x^4\pm20x^3+15x^2\pm6x+1$

9. $(2\pm y)^4$ R: $2^4\pm4.2^3.y+6.2^2.y^2\pm4.2.y^3+y^4=$
$=16\pm32y+24y^2\pm8y^3+y^4$

10. $(10\pm n)^3$ R: $1000\pm300n+30n^2\pm n^3$

11. $(a^2\pm b^2)^5$ R: $(a^2)^5\pm5(a^2)^4b^2+10(a^2)^3(b^2)^2\pm10(a^2)^2(b^2)^3+5a^2(b^2)^4\pm$
$\pm(b^2)^5=a^{10}\pm5a^8b^2+10a^6b^4\pm10a^4b^6+5a^2b^8\pm b^{10}$

12. $(a^3\pm b^2)^5$ R: $a^{15}\pm5a^{12}b^2+10a^9b^4\pm10a^6b^6+5a^3b^8\pm b^{10}$

13. $(x^3\pm x^4)^6$ R: $x^{18}\pm6x^{19}+15x^{20}\pm20x^{21}+15x^{22}\pm6x^{23}+x^{24}$

14. $(2a\pm1)^6$ R: $(2a)^6\pm6(2a)^5.1+15(2a)^4.1^2\pm20(2a)^3.1^3+15(2a)^2.1^4\pm$
$\pm6.2a.1^5+1^6=64a^6\pm192a^5+240a^4\pm160a^3+60a^2\pm12a+1$

15. $(3x\pm2)^5$ R: $243x^5\pm810x^4+1080x^3\pm720x^2+240x\pm32$

16. $\left(\frac{1}{2}\pm a\right)^4$ R: $\frac{1}{16}\pm\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}a^2\pm2a^3+a^4$

17. $\left(m\pm\frac{1}{3}\right)^5$ R: $m^5+\frac{5}{3}m^4\pm\frac{10}{9}m^3\pm\frac{10}{27}m^2\pm\frac{5}{81}m\pm\frac{1}{243}$

18. $\left(\frac{1}{2}a \pm \frac{2}{3}\right)^6$ R: $\frac{1}{64}a^6 \pm \frac{1}{8}a^5 + \frac{5}{12}a^4 \pm \frac{20}{27}a^3 + \frac{20}{27}a^2 \pm$
$\pm \frac{32}{81}a + \frac{64}{729}$

19. $(a^{-1} \pm a^{-2})^7$ R: $a^{-7} \pm 7a^{-8} + 21a^{-9} \pm 35a^{-10} + 35a^{-11} \pm$
$\pm 21a^{-12} + 7a^{-13} \pm a^{-14}$

20. $\left(a^2b^3 \pm \frac{1}{3}a^3b^2\right)^6$ R: $a^{12}b^{18} \pm 2a^{13}b^{17} + \frac{5}{3}a^{14}b^{16} \pm \frac{20}{27}a^{15}b^{15} +$
$+ \frac{5}{27}a^{16}b^{14} \pm \frac{2}{81}a^{17}b^{13} + \frac{1}{729}a^{18}b^{12}$

21. $(-a \pm 0{,}1)^4$ R: $a^4 \mp 0{,}4a^3 \pm 0{,}06a^2 \mp 0{,}004a \pm 0{,}0001$

22. $\left(x \pm \frac{2}{x}\right)^7$ R: $x^7 \pm 14x^5 + 84x^3 \pm 280x + 560\frac{1}{x} \pm 672\frac{1}{x^3} +$
$+ 448\frac{1}{x^5} \pm \frac{128}{x^7}$

23. $\left(\frac{a}{b} \pm \frac{b}{a}\right)^9$ R: $\frac{a^9}{b^9} \pm 9\frac{a^7}{b^7} + 36\frac{a^5}{b^5} \pm 84\frac{a^3}{b^3} + 126\frac{a}{b} \pm$
$\pm 126\frac{b}{a} + 84\frac{b^3}{a^3} \pm 36\frac{b^5}{a^5} + 9\frac{b^7}{a^7} \pm \frac{b^9}{a^9}$

24. $\left(1 \pm \frac{1}{n}\right)^{10}$ R: $1 \pm \frac{10}{n} + \frac{45}{n^2} \pm \frac{120}{n^3} + \frac{210}{n^4} \pm \frac{252}{n^5} + \frac{210}{n^6} \pm$
$\pm \frac{120}{n^7} + \frac{45}{n^8} \pm \frac{10}{n^9} + \frac{1}{n^{10}}$

25. $(e^{-x} \pm e^{x})^6$ R: $e^{-6x} \pm 6e^{-4x} + 15e^{-2x} \pm 20 + 15e^{2x} \pm 6e^{4x} + e^{6x}$

26. $\left(\frac{a}{2} \pm \frac{3b}{2}\right)^4$ R: $\frac{a^4}{16} \pm \frac{3}{4}a^3b + \frac{27}{8}a^2b^2 \pm \frac{27}{4}ab^3 + \frac{81}{16}b^4$

27. $\left(\frac{a^2}{b^2} \pm \frac{b^2}{a^2}\right)^6$ R: $\frac{a^{12}}{b^{12}} \pm 6\frac{a^8}{b^8} + 15\frac{a^4}{b^4} \pm 20 + 15\frac{b^4}{a^4} \pm 6\frac{b^8}{a^8} + \frac{b^{12}}{a^{12}}$

28. $\left(a^{-\frac{3}{2}} \pm b^{\frac{1}{2}}\right)^4$ R: $a^{-6} \pm 4a^{-\frac{9}{2}}b^{\frac{1}{2}} + 6a^{-3}b^{\frac{1}{4}} \pm 4a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}} + b^2$

29. $(a^3b^{-1} \pm a^2b^3)^5$ R: $a^{15}b^{-5} \pm 5a^{14}b^{-1} + 10a^{13}b^3 \pm 10a^{12}b^7 +$
$+ 5a^{11}b^{11} \pm a^{10}b^{15}$

30. $\left(\frac{1}{2}a^{-2} \pm 2a^{-1}\right)^5$ R: $\frac{1}{32a^{10}} \pm \frac{5}{8a^9} + \frac{5}{a^8} \pm \frac{20}{a^7} + \frac{40}{a^6} \pm \frac{32}{a^5}$

III. *Hallar, directamente, el término:*

1. 10º *de* $(1-i)^{17}$ R: $-24\,310\,i^9$ (Si i es la unidad imaginaria es R: $-24\,310\,i$ porque $i^9=i^8\cdot i=1i=i$)

2. 9º *de* $(1+i)^{12}$ R: $495\,i^8$ (Si i es la unidad imaginaria el resultado es 495 porque $i^8=(i^4)^2=1^2=1$)

3. 100º *de* $(a+2b)^{200}$ R: $\binom{200}{99}2^{99}a^{101}\cdot b^{99}$

4. 10º *de* $(2a-b)^{19}$ R: $-\binom{19}{9}2^{10}\cdot a^{10}\cdot b^{9}$

5. 4º *de* $(2a^2b^2-3a^{-1}b)^6$ R: $-4320\,a^3b^9$

6. 12º *de* $\left(\frac{a}{x}-\frac{x}{a}\right)^{20}$ R: $\binom{20}{11}\frac{x^2}{a^2}$

7. 3º *de* $\left(-\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}a^5\right)^9$ R: $-\frac{1}{8}a^{24}$

8. 15º *de* $(6ab-2a^4b^3)^{23}$ R: $\binom{23}{14}(6ab)^9(-2a^4b^3)^{14} =$
$= \binom{23}{14}6^9\cdot 2^{14}a^{65}b^{51}$

9. 3º *de* $\left(-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{7}a^5\right)^9$ R: $\binom{9}{2}\left(-\frac{1}{2}a^2\right)^7\left(\frac{3}{7}a^5\right)^2 =$
$= -36\cdot\frac{1}{2^7}\cdot\frac{3^2}{7^2}a^{24} = -\frac{81}{1568}a^{24}$

10. 5º *de* $\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^9$ R: $126\sqrt{a}$

Hallar, directamente, el coeficiente del término

11. 5º *de* $(2x+3y)^{12}$ R: $\binom{12}{4}2^8\cdot 3^4 = 10\,264\,320$

12. 6º *de* $\left(4x^3-\frac{1}{4}y^2\right)^{10}$ R: -252

13. 11º *de* $(a^2b^3+a^3b^4)^{12}$ R: 66

14. 13º *de* $(-1+x^{-1})^{20}$ R: 125 970

15. 5º *de* $(a^2b^{-3}+a^{-2}b^3)^9$ R: 126

IV. *Hallar, directamente, el término del medio del desarrollo de*

1. $(1+x)^8$ R: $70\,x^4$ **2.** $(a^2-2\,x^4)^{20}$ R: $184\,756\,a^{20}\,x^{40}$

3. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^4$ R: $-\frac{1}{2}\,x$ **4.** $\left(2\,x+\frac{3}{x}\right)^{20}$ R: $\binom{20}{10}.2^{10}.3^{10}$

5. $\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)^{10}$ R: 252 **6.** $\left(\frac{3}{2}a^2-\frac{1}{3}\right)^{14}$ R: $107{,}25\,a^{14}$

7. $(x+x^{-1})^{12}$ R: 924 **8.** $(e^{-x}+e^{x})^6$ R: 20

9. $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^8$ R: $70\,a^2$

10. $\left(a^{\frac{1}{2}}+2\,a^{-1}b^{-\frac{3}{2}}\right)^4$ R: $24\,a^{-1}b^{-3}$

(Téngase presente que un polinomio *completo* de grado n con respecto a una letra, tiene $n+1$ términos puesto que en él figuran las potencias 0, 1, 2, ..., n de esa letra que son $n+1$. El término del medio es el de orden $\frac{n}{2}+1$ si n es par).

V. *Hallar, directamente, los dos términos del medio del desarrollo de*

11. $(1+x)^{21}$ R: $352\,716\,x^{10}$ y $352\,716\,x^{11}$

12. $(3\,x-2\,y)^7$ R: $-22\,680\,x^4\,y^3$ y $15\,120\,x^3\,y^4$

13. $(9\,x^2+5\,y^3)^{11}$ R: $\binom{11}{5}.9^6.5^5.x^{12}.y^{15}$ y $\binom{11}{6}.9^5.5^6.x^{10}.y^{18}$

14. $\left(\frac{a^2}{4}-4\right)^9$ R: $31{,}5\,a^{10}$ y $-504\,a^8$

15. $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)^7$ R: $\frac{35}{432}\,x^8\,y^6$ y $\frac{35}{648}\,x^6\,y^8$

16. $(a^{-1}-1)^{17}$ R: $24\,310\,a^{-9}$ y $-24\,310\,a^{-8}$

17. $(y^2-y^{-1})^9$ R: $126\,y^6$ y $-126\,y^3$

18. $\left(1-\frac{3}{2}a^{-\frac{3}{2}}\right)^7$ R: $-118{,}125\,a^{-\frac{9}{2}}$ y $\frac{2835}{16}\,a^{-6}$

19. $\left(2\,a^{-3}-\frac{1}{2}\,a^{\frac{1}{2}}\right)^5$ R: $20\,a^{-8}$ y $-5\,a^{-\frac{9}{2}}$

20. $(a\,x^{-1}-a^{-1}\,x)^9$ R: $126\,a\,x^{-1}$ y $-126\,a^{-1}\,x$

VI. *Desarrollar hasta el 6º término las potencias siguientes:*

1. $(a+b)^{-1}$ R: $a^{-1}-a^{-2}b+a^{-3}b^2+a^{-4}b^3-a^{-5}b^4+a^{-6}b^5$

2. $(a+b)^{-2}$ R: $a^{-2}-2\,a^{-3}b+3\,a^{-4}b^2-4\,a^{-5}b^3+5\,a^{-6}b^4-6\,a^{-7}b^5$

3. $(a+b)^{-3}$ R: $a^{-3}-3\,a^{-4}b+6\,a^{-5}b^2-10\,a^{-6}b^3+15\,a^{-7}b^4-21\,a^{-8}b^5$

4. $(a-b)^{-3}$ R: $a^{-3}+3\,a^{-4}b+6\,a^{-5}b^2+10\,a^{-6}b^3+15\,a^{-7}b^4+21\,a^{-8}b^5$

5. $(a-b)^{-4}$ R: $a^{-4}+4\,a^{-5}b+10\,a^{-6}b^2+20\,a^{-7}b^3+35\,a^{-8}b^4+56\,a^{-9}b^5$

6. $(1+x)^{-1}$ R: $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5$

7. $(1-x)^{-1}$ R: $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$

8. $(1+x)^{-2}$ R: $1-2\,x+3\,x^2-4\,x^3+5\,x^4-6\,x^5$

9. $(1-x)^{-2}$ R: $1+2\,x+3\,x^2+4\,x^3+5\,x^4+6\,x^5$

10. $(1-x)^{-4}$ R: $1+4\,x+10\,x^2+20\,x^3+35\,x^4+56\,x^5$

11. $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ R: $1+\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{8}\,x^2+\frac{1}{16}\,x^3-\frac{5}{128}\,x^4+\frac{7}{256}\,x^5$

12. $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ R: $1\mid\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{8}\,x^2-\frac{1}{16}\,x^3-\frac{5}{128}\,x^4-\frac{7}{256}\,x^5$

13. $(a+x)^{\frac{1}{2}}$ R: $a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\,a^{-\frac{1}{2}}\,x-\frac{1}{8}\,a^{-\frac{3}{2}}\,x^2+\frac{1}{16}\,a^{-\frac{5}{2}}\,x^3-\frac{5}{128}\,a^{-\frac{7}{2}}\,x^4+\frac{7}{256}\,a^{-\frac{9}{2}}\,x^5$

14. $(a+b)^{-\frac{1}{2}}$ R: $a^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\,a^{-\frac{3}{2}}\,b+\frac{3}{8}\,a^{-\frac{5}{2}}\,b^2-\frac{5}{16}\,a^{-\frac{7}{2}}\,b^3+\frac{35}{128}\,a^{-\frac{9}{2}}\,b^4-\frac{63}{256}\,a^{-\frac{11}{2}}\,b^5$

15. $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ R: $1+\frac{1}{3}\,x-\frac{1}{9}\,x^2+\frac{5}{81}\,x^3-\frac{10}{243}\,x^4+\frac{22}{729}\,x^5$

16. $(1-x)^{\frac{1}{3}}$ R: $1-\frac{1}{3}\,x-\frac{1}{9}\,x^2-\frac{5}{81}\,x^3-\frac{10}{243}\,x^4-\frac{22}{729}\,x^5$

17. $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ R: $1-\frac{1}{2}\,x^2-\frac{3}{8}\,x^4-\frac{5}{16}\,x^6+\frac{35}{128}\,x^8-\frac{63}{256}\,x^{10}$

18. $\left(m^{-2}+n^{-\frac{1}{6}}\right)^{-4}$ R: $m^8-4\,m^{10}n^{-\frac{1}{6}}+10\,m^{12}n^{-\frac{1}{3}}-20\,m^{14}n^{-\frac{1}{2}}+$

$+35\,m^{16}n^{-\frac{2}{3}}-56\,m^{18}n^{-\frac{5}{6}}$

19. $(1-x)^{\frac{5}{3}}$ R: $1-\frac{5}{3}x+\frac{5}{9}x^2-\frac{5}{81}x^3+\frac{5}{243}x^4-\frac{7}{729}x^5$

20. $\left(x^{-\frac{3}{2}}-2\,y\right)^{\frac{5}{2}}$ R: $x^{-\frac{15}{4}}-5\,x^{-\frac{9}{4}}y+\frac{15}{2}x^{-\frac{3}{4}}y^2-\frac{5}{2}x^{-\frac{3}{4}}y^3-$

$-\frac{5}{8}x^{\frac{9}{4}}y^4$

Nota: El concepto de número combinatorio se extiende al caso en que el numerador sea un número real o complejo conviniendo en representar a un cociente de productos del tipo

$$\frac{\alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 2\,.\,1}$$ donde α es número

real y n natural por el símbolo $\binom{\alpha}{n}$ y recíprocamente.

Ejemplo: $\dfrac{\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}-1\right)\left(\frac{4}{3}-2\right)\left(\frac{4}{3}-3\right)\left(\frac{4}{3}-4\right)}{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}$ se representa por $\binom{\frac{4}{3}}{5}$

Recíprocamente: $\binom{\frac{1}{5}}{4}$ significa $\dfrac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)\left(\frac{1}{5}-3\right)}{4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}$

VII. *Hallar, directamente, el término*

1. 6º *de* $(a+x)^{\frac{4}{3}}$ R: $\dfrac{\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}-1\right)\left(\frac{4}{3}-2\right)\left(\frac{4}{3}-3\right)\left(\frac{4}{3}-4\right)}{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}\,a^{-\frac{11}{3}}x^5=$

$=\dfrac{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot-\frac{2}{3}\cdot-\frac{5}{3}\cdot-\frac{8}{3}}{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}\,a^{-\frac{11}{3}}x^5=$

$=\frac{8}{729}\,a^{-\frac{11}{3}}x^5$

2. 5º *de* $(a+b)^{\frac{1}{5}}$ R: $\dfrac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)\left(\frac{1}{5}-3\right)}{4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}\,a^{\frac{1}{5}-4}b^4=$

$=\dfrac{\frac{1}{5}\cdot-\frac{4}{5}\cdot-\frac{9}{5}\cdot-\frac{14}{5}}{4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}\,a^{-\frac{19}{5}}b^4=-\frac{21}{625}\,a^{-\frac{19}{5}}b^4$

3. 9º *de* $(a+2\,x)^{\frac{7}{2}}$ R: $\binom{\frac{7}{2}}{8}a^{\frac{7}{2}-8}(2\,x)^8=\binom{\frac{7}{2}}{8}a^{-\frac{9}{2}}2^8x^8$

4. 9º *de* $\left(a^4-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{8}{3}}$ R: $\binom{\frac{8}{3}}{8}\left(a^4\right)^{\frac{8}{3}-8}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^8=\binom{\frac{8}{3}}{8}a^{-\frac{64}{3}}x^4$

5. 12º *de* $(a+b)^{-\frac{1}{5}}$ R: $\binom{-\frac{1}{5}}{11}a^{-\frac{56}{11}}b^{11}$

6. *¿A qué potencia fué elevado el binomio* a^2+b^3 *si:*

a) su 5º término es de grado 26, R: a la 11

En efecto: llamando x al exponente buscado resulta

$$T_{12}=\binom{x}{4}a^{2\,(x-4)}\left(b^3\right)^4=\binom{x}{4}a^{2\,x-8}b^{12}$$

y como debe ser $2\,x-8+12=26$

es $2\,x=26+8-12=22$

luego $x=11$

Efectivamente: el 5º término de $(a^2+b^3)^{11}$

$$T_5=\binom{11}{4}(a^2)^7\,(b^3)^4=\binom{11}{4}a^{14}b^{12}$$ que es de grado 26

7. *¿Cuál es el término de grado 32 del desarrollo de* $(2\,a^4+3\,a^3)^{10}$

R: el 9º

En efecto: llamando x al orden del término buscado, se tiene:

$$\binom{10}{x-1}(2\,a^4)^{10-x+1}\,(3\,a^3)^{x-1}=\binom{10}{x-1}2^{10-x+1}a^{40-4\,x+4}3^{x-1}a^{3\,x-3}$$

y como el grado de este término es 32, se tiene

$40-4\,x+4+3\,x-3=32$ de donde $x=40+4-3-32=9$

Comprobación: $T_9=\binom{10}{8}(2\,a^4)^2\,(3\,a^3)^8=\binom{10}{5}2^2\,.\,3^8\,.\,a^{8+24}$

8. *¿A qué potencia fué elevado el binomio* m^5+n^4 *si el término 11º es de grado 50?* R: a la 12

9. *¿Cuál es el término que contiene a*

x^{16} en $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^{14}$? R: el 5º

10. *¿Cuál es el orden del término independiente de*

$\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{20}$? R: el 9º

Calcular con tres cifras decimales aplicando el binomio de Newton las raíces cuadradas que se indican a continuación y verificar los resultados obtenidos hallando esas raíces con menor error que 0,001 mediante la regla estudiada en Aritmética (*).

1. $\sqrt{3}$	R: 1,732	2. $\sqrt{5}$	R: 2,236	3. $\sqrt{26}$	R: 5,009
4. $\sqrt{24}$	R: 4,899	5. $\sqrt{50}$	R: 7,071	6. $\sqrt{10}$	R: 3,162
7. $\sqrt{1,02}$	R: 1,009	8. $\sqrt{1,01}$	R: 1,004	9. $\sqrt{0,99}$	R: 0,994
10. $\sqrt{0,98}$	R: 0,989	11. $\sqrt{1,3}$	R: 1,140	12. $\sqrt{0,75}$	R: 0,866

Resolvemos, para que sirva de modelo, *a*) el ejercicio 1.

Siendo $3 = 4 - 1 = 4\left(1-\frac{1}{4}\right)$ es $\sqrt{3} = \sqrt{4\left(1-\frac{1}{4}\right)} = 2\left(1-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

luego $\sqrt{3} = 2\left[1^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}.1^{\frac{1}{2}-1}.\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{2.3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots\right]$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}\cdot\frac{1}{16} + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2.3}\cdot\frac{1}{64} + \ldots\right)$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{128} + \frac{1}{1024} + \ldots\right)$$

$$= 2\,(1 - 0{,}125 - 0{,}007813 - 0{,}0009765 + \ldots) \cong 2\,.\,0{,}866 = 1{,}732$$

b) el ejercicio 7.

$$\sqrt{1,02} = (1+0,02)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\,0,02 - \frac{1}{8}\,.\,0,02^2 + \frac{1}{16}\,.\,0;02^3 + \frac{5}{128}\,.\,0,02^4 + \ldots$$

$$\sqrt{1,02} \cong 1 + 0,1 - 0,00005 = 1,00995 \cong 1,009$$

(*) Matemáticas, IIº *curso*, págs. 47 y siguientes.

13. $\sqrt[3]{9}$	R: 2,080	14. $\sqrt[3]{1,3}$	R: 1,091	15. $\sqrt[3]{0,9}$	R: 0,965
16. $\sqrt[4]{17}$	R: 2,002	17. $\sqrt[4]{2,85}$	R: 1,299	18. $\sqrt[5]{1,001}$	R: 1,0002

Para el ejercicio 13 , se tiene:

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8+1} = \sqrt[3]{8\left(1+\frac{1}{8}\right)} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{64} + \frac{5}{81}\cdot\frac{1}{512} + \ldots\right)$$

$$\sqrt[3]{9} \cong 2\,.\,1,040 = 2,080$$

IX) *Calcular aproximadamente el monto de* **3 000 $** *colocados a interés compuesto.*

19. al 1 % en 20 años
R: $3000\,(1+0,01)^{20} = 3000\,(1+20\,.\,0,01+190\,.\,0,01^2+1140\,.\,0,01^3+4845 \times \times 0,01^4) \cong 3660,56$

20. al 6 % en 4 años
R: $3000\,(1+0,06)^4 = 3000\,(1+4\,.\,0,06+6\,.\,0,06^2+4\,.\,0,06^3) \cong 3787,32$

X) *Calcular aproximadamente la suma que es necesario colocar a interés compuesto, capitalizando anualmente, para obtener* 1000 $.

21. al 4 % en 7 años:
R: $1000\,(1+0,04)^{-7} = 1000\,(1-7\,.\,0,04+28\,.\,0,04^2-84\,.\,0,04^3+ +210\,.\,0,04^4-\ldots) \cong 759,9$ $

22. al 2 % en 10 años:
R: $1000\,(1+0,02)^{-10} = 1000\,(1-10\,.\,0,02+55\,.\,0,02^2-220\,.\,0,02^3+ +715\,.\,0,02^4+\ldots) \cong 820,3$ $

23. al 6 % en 5 años:
R: $1000\,(1+0,06)^{-5} = 1000\,(1-5\,.\,0,06+15\,.\,0;06^2-35\,.\,0,06^3+ +70\,.\,0,06^4+\ldots) \cong 747,2$ $

24. al 10 % en 10 años:
R: $1000\,(1+0,1)^{-10} = 1000\,(1-10\,.\,0,1+55\,.\,0,1^2-220\,.\,0,1^3+ +715\,.\,0,1-\ldots) \cong 401,5$ $

25. al 3 % en 15 años:
R: $1000\,(1+0,03)^{-15} = 1000\,(1-15\,.\,0,03+120\,.\,0,03^2-680\,.\,0,03^3+ +3060\,.\,0,03^4-\ldots) \cong 641,8$ $

Ampliación del Triángulo de Pascal. — De la extensión del concepto de número combinatorio resulta que:

Los números combinatorios de numerador menor que el orden, siendo ambos positivos, son iguales a 0.

Ejemplo: $\binom{3}{5} = \frac{3\,.\,(3-1)\,(3-2)\,(3-3)\,(3-4)}{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1} = \frac{0}{120} = 0$

Se conviene en que

Los números combinatorios de órdenes negativos son iguales a 0.

Ejemplos: $\binom{3}{-2} = 0 \;;\; \binom{5}{-5} = 0 \;;\; \binom{4}{-7} = 0$

Puede demostrarse que todas las propiedades de los números combinatorios de numerador y órdenes naturales son válidas para estos números combinatorios, lo cual permite ampliar el Triángulo de Pascal en todo sentido, como se ve a continuación.

. . . .

. . .	0	0	1	−4	10	−20	35	−56	. . . . .
. . .	0	0	1	−3	6	−10	15	−21	. . . .
. . .	0	0	1	−2	3	−4	5	−6	. . . .
. . .	0	0	1	−1	1	−1	1	−1	. . . .
. . .	0	0	1	0	0	0	0	0	. . . .
. . .	0	0	1	1	0	0	0	0	. . . .
. . .	0	0	1	2	1	0	0	0	. . . .
. . .	0	0	1	3	3	1	0	0	. . . .
. . .	0	0	1	4	6	4	1	0	. . . .
. . .	0	0	1	5	10	10	5	1	0 . . .

. . . .

Los coeficientes del desarrollo de $(a+b)^{-n}$ son los números no nulos que figuran en la fila en la que se encuentra el exponente $-n$ como consecutivo del 1 de esa fila.

Así, por ejemplo, los coeficientes de

$(a+b)^{-2}$ son: 1, −2, 3, −4, 5 . . . , luego

$$(a+b)^{-2} = a^{-2} - 2\,a^{-3}b + 3\,a^{-4}b^2 - 4\,a^{-5}b^3 + 5\,a^{-6}b^4 - 6\,a^{-7}b^5 \ldots$$

Análogamente, resulta

$$(a+b)^{-1} = a^{-1} - a^{-2}b + a^{-3}b^2 + a^{-4}b^3 - a^{-5}b^4 + a^{-6}b^5 \ldots$$

APENDICE

I) Descomposición de radicales dobles. — Se llama *radicales cuadráticos dobles* a las expresiones del tipo

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} \quad \text{siendo} \quad b > 0 \quad \text{y no cuadrado perfecto.}$$

Si $a^2 - b = c^2$ [1], es decir, un cuadrado perfecto, es

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}} \qquad [I]$$

entendiendo que: *los radicales del segundo miembro se toman con el mismo signo o con signo contrario según que el signo que preceda a* $\sqrt{b}$ *en el primer miembro sea* + *ó* −, *respectivamente.*

Efectivamente es $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$ porque

$$\left(\sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{a+c}{2}}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{a+c}{2} \cdot \frac{a-c}{2}} + \left(\sqrt{\frac{a-c}{2}}\right)^2$$

por cuadrado de un binomio. Simplificando el primer y tercer términos y efectuando el producto indicado en el segundo, se tiene:

$$\left(\sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}\right)^2 = \frac{a+c}{2} + 2\sqrt{\frac{a^2-c^2}{4}} + \frac{a-c}{2}$$

$$= \frac{a+c+2\sqrt{a^2-c^2}+a-c}{2} = \frac{2a+2\sqrt{a^2-c^2}}{2}$$

y como $c^2 = a^2 - b$ por [1], resulta

$$\left(\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}\right)^2 = \frac{2a+2\sqrt{a^2-a^2+b}}{2} = a+\sqrt{b}$$

que es el radicando de [I]. En la misma forma se prueba que se verifican las otras tres igualdades que se obtienen de la [I] al combinar los signos de los radicales en la forma indicada anteriormente.

Esta descomposición suele ser muy útil en la resolución de ecuaciones bicuadradas, extracciones de raíces cuadradas de números complejos y en la simplificación de ciertos radicales.

EJEMPLO. — *Descomponer*: *a*) $\sqrt{6+\sqrt{20}}$; *b*) $\sqrt{6-\sqrt{20}}$

a) Como $6^2 - 20 = 36 - 20 = 16 = 4^2$ es $\sqrt{6^2-20} = 4$

luego $$\sqrt{6+\sqrt{20}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{6+4}{2}}+\sqrt{\frac{6-4}{2}} = \sqrt{5}+1 \\ -\sqrt{\frac{6+4}{2}}-\sqrt{\frac{6-4}{2}} = -\sqrt{5}-1 \end{cases}$$

y *b*) $$\sqrt{6-\sqrt{20}} = \begin{cases} \sqrt{5}-1 \\ -\sqrt{5}+1 \end{cases}$$

II) *Descomponer en radicales simples los radicales dobles siguientes*:

1. $\sqrt{3\pm\sqrt{5}}$ R: $\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$
2. $\sqrt{3\pm\sqrt{8}}$ R: $\pm\sqrt{2}\pm 1$
3. $\sqrt{9\pm\sqrt{80}}$ R: $\pm\sqrt{5}\pm 2$
4. $\sqrt{6\pm\sqrt{32}}$ R: $\pm 2\pm\sqrt{2}$
5. $\sqrt{11\pm 3\sqrt{8}}$ R: $\pm 3\pm\sqrt{2}$
6. $\sqrt{6\pm 2\sqrt{5}}$ R: $\pm\sqrt{5}\pm 1$
7. $\sqrt{13\pm 2\sqrt{42}}$ R: $\pm\sqrt{7}\pm\sqrt{6}$

8. $\sqrt{11\pm 2\sqrt{30}}$ R: $\pm\sqrt{6}\pm\sqrt{5}$
9. $\sqrt{8\pm 2\sqrt{15}}$ R: $\pm\sqrt{5}\pm\sqrt{3}$
10. $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ R: $\pm\sqrt{5}\pm\sqrt{2}$
11. $\sqrt{\frac{13}{2}\pm\sqrt{30}}$ R: $\sqrt{5}\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$
12. $\sqrt{\frac{19}{15}\pm\sqrt{\frac{8}{5}}}$ R: $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$
13. $\sqrt{\frac{10}{3}\pm\sqrt{\frac{19}{9}}}$ R: $\sqrt{\frac{19}{6}}\pm\sqrt{\frac{1}{6}}$
14. $\sqrt{\frac{5}{6}\pm\sqrt{\frac{2}{3}}}$ R: $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$
15. $\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$ R: $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}$
16. $\sqrt{4\frac{1}{3}\pm\frac{4}{3}\sqrt{3}}$ R: $\pm\sqrt{3}\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$
17. $\sqrt{1\pm\sqrt{1-a^2}}$ R: $\pm\sqrt{\frac{1+a}{2}}\pm\sqrt{\frac{1-a}{2}}$
18. $\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$ R: $\pm\sqrt{a-1}\pm 1$
10. $\sqrt{a+ab-2a\sqrt{b}}$ R: $\pm\sqrt{a}\pm\sqrt{ab}$
20. $\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y}{2}\sqrt{x^2-y^2}}$ R: $\pm\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{2}\pm\frac{y}{2}$

III) Transformación de binomios de términos irracionales cuadráticos en un radical doble único. — Sea por ejemplo el binomio $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$. Elevándolo al cuadrado y extrayéndole la raíz cuadrada se tiene:

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b} = \sqrt{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2} = \sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}}\,.$$

EJEMPLO: $\sqrt{5}+\sqrt{3} = \sqrt{5+3+2\sqrt{5\,.\,3}} = \sqrt{8+2\sqrt{15}}\,.$

Transformar en un radical único los binomios:

1. $\sqrt{5} \pm \sqrt{2}$ R: $\sqrt{7 \pm \sqrt{40}}$
2. $\sqrt{7} \pm \sqrt{3}$ R: $\sqrt{10 + \sqrt{84}}$
3. $\sqrt{x+1} \pm \sqrt{x-1}$ R: $\sqrt{2x \pm 2\sqrt{x^2-1}}$
4. $\sqrt{2} \pm 1$ R: $\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}}$
5. $\sqrt{3+\sqrt{5}} \pm \sqrt{3-\sqrt{5}}$ R: $\sqrt{10}$; $\sqrt{2}$

Solución: $\sqrt{3+\sqrt{5}} \pm \sqrt{3-\sqrt{5}} =$

$$= \sqrt{3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5} \pm 2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}} =$$

$$= \sqrt{6 \pm 2\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}} = \sqrt{6 \pm 2\sqrt{9-5}} =$$

$$= \sqrt{6 \pm 2 \cdot 2} = \sqrt{6 \pm 4} = \begin{cases} \sqrt{10} \\ \sqrt{2} \end{cases}$$

6. $\sqrt{2+\sqrt{3}} \pm \sqrt{2-\sqrt{3}}$ R: $\sqrt{6}$; $\sqrt{2}$
7. $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}}$ R: $\sqrt{3 \pm \sqrt{7}}$
8. $\sqrt{11+2\sqrt{10}} \pm \sqrt{11-2\sqrt{10}}$ R: $2\sqrt{10}$; 2
9. $\sqrt{37+\sqrt{280}} \pm \sqrt{37-\sqrt{280}}$ R: $2\sqrt{35}$; $2\sqrt{2}$
10. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} \pm \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ R: $2\sqrt{x-1}$; 2

IV) Racionalización de denominadores. — *Caso en que el denominador es un binomio cuyos términos son irracionales no cuadráticos.*

Sea, por ejemplo, racionalizar el denominador de la fracción $\dfrac{1}{\sqrt[m]{x} \pm \sqrt[m]{a}}$ siendo $m > 2$ un número natural.

Para resolver este problema se emplea el caso de factoreo que resulta de la aplicación de la divisibilidad de la suma o diferencia de dos potencias de igual grado por la suma o diferencia de sus bases, y la regla de Ruffini (*Matemáticas III*, págs. 111 a 114).

Teniendo en cuenta que $x \pm a = \left(\sqrt[m]{x}\right)^m \pm \left(\sqrt[m]{a}\right)^m$, resulta:

$$x+a = \left(\sqrt[m]{x}+\sqrt[m]{a}\right)\overbrace{\left(\sqrt[m]{x^{m-1}}-\sqrt[m]{ax^{m-2}}+\sqrt[m]{a^2x^{m-3}}-\ldots+\sqrt[m]{a^{m-1}}\right)}^{R} \quad \text{si } m \text{ es } impar$$

$$x-a = \left(\sqrt[m]{x}+\sqrt[m]{a}\right)\overbrace{\left(\sqrt[m]{x^{m-1}}-\sqrt[m]{ax^{m-2}}+\sqrt[m]{a^2x^{m-3}}-\ldots-\sqrt[m]{a^{m-1}}\right)}^{R'} \quad \text{si } m \text{ es } par$$

$$x-a = \left(\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}\right)\overbrace{\left(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{ax^{m-2}}+\sqrt[m]{a^2x^{m-3}}+\ldots+\sqrt[m]{a^{m-1}}\right)}^{R''} \quad siempre$$

Por lo tanto, si m es impar, multiplicando numerador y denominador por el *factor racionalizante* **R**:

$$\frac{1}{\sqrt[m]{x}+\sqrt[m]{a}} = \frac{R}{\left(\sqrt[m]{x}+\sqrt[m]{a}\right)\left(\sqrt[m]{x^{m-1}}-\sqrt[m]{ax^{m-2}}+\sqrt[m]{a^2x^{m-3}}-\ldots+\sqrt[m]{a^{m-1}}\right)} = \frac{R}{x+a}$$

Si m es *par*, se tiene multiplicando numerador y denominador por R′

$$\frac{1}{\sqrt[m]{x}+\sqrt[m]{a}} = \frac{R'}{\left(\sqrt[m]{x}+\sqrt[m]{a}\right)\left(\sqrt[m]{x^{m-1}}-\sqrt[m]{ax^{m-2}}+\sqrt[m]{a^2x^{m-3}}-\ldots-\sqrt[m]{a^{m-1}}\right)} = \frac{R'}{x-a}$$

y si m es *par* o *impar*, resulta siempre

$$\frac{1}{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}} = \frac{R''}{\left(\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}\right)\left(\sqrt[m]{x^{m-1}}+\sqrt[m]{ax^{m-2}}+\sqrt[m]{a^2x^{m-3}}+\ldots+\sqrt[m]{a^{m-1}}\right)} = \frac{R''}{x-a}$$

EJEMPLOS: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a}} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}}{x+a}$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a}} = \frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{ax^2}+\sqrt[4]{a^2x}-\sqrt[4]{a^3}}{x-a}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}}{x-a}$$

V) *Racionalizar los denominadores de las fracciones.*

1. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}$ R: $\dfrac{1}{6}\left(2\sqrt[3]{2}-2+\sqrt[3]{4}\right)$

2. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$ R: $2\sqrt[3]{2}+2+\sqrt[3]{4}$

3. $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1}$ R: $2-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}$

4. $\dfrac{a-b}{\sqrt[4]{a}\pm\sqrt[4]{b}}$ R: $\sqrt[4]{a^3}\mp\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}\mp\sqrt[4]{b^3}$

5. $\dfrac{1}{a-\sqrt[5]{b}}$ R: $\dfrac{\sqrt[5]{a^4}-\sqrt[5]{a^3b}+\sqrt[5]{a^2b^2}-\sqrt[5]{ab^3}+\sqrt[5]{b^4}}{a^5-b}$

6. $\dfrac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{4}}$ R: $\dfrac{1}{9}\left(1-2\sqrt[3]{100}+4\sqrt[3]{10}\right)$

VI) *Racionalizar los numeradores de las fracciones.*

7. $\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$ R: $\dfrac{h}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x}}$

8. $\dfrac{\sqrt[4]{a+b}+\sqrt[4]{a-b}}{4ab}$

R: $\dfrac{1}{2a\left(\sqrt[4]{(a+b)^3}-\sqrt[4]{(a+b)^2(a-b)}+\sqrt[4]{(a+b)(a-b)^2}+\sqrt[4]{(a-b)^3}\right)}$

9. $\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$ R: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2}}$

10. $\sqrt[3]{n^3+an^2}-\sqrt[3]{n^3-an^2}$

Solución: **Multiplicando y dividiendo por el factor racionalizante R″, se tiene:**

$$\sqrt[3]{n^3+an^2}-\sqrt[3]{n^3-an^2} = \frac{n^3+an^2-n^3+an^2}{\sqrt[3]{(n^3+an^2)^2}+\sqrt[3]{n^6-a^2n^4}+\sqrt[3]{(n^3-an^2)^2}}$$

Simplificando el numerador y sacando n^6 como factor común en cada uno de los radicales del denominador, da:

$$\sqrt[3]{n^3+an^2}-\sqrt[3]{n^3-an^2} = \frac{2an^2}{\sqrt[3]{n^6\left(1+\frac{a}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{n^6\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right)}+\sqrt[3]{n^6\left(1-\frac{a}{n}\right)^2}}$$

Al extraer de cada radical el factor n^6 se obtiene n^2 como factor común en el denominador y al simplificarlo con el n^2 del numerador resulta:

$$\sqrt[3]{n^3+an^2}-\sqrt[3]{n^3-an^2} = \frac{2a}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{a}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{a^2}{n^2}}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{a}{n}\right)^2}}$$

VII) Logaritmos naturales o neperianos. — Las tablas de logaritmos que hemos explicado y luego utilizado para resolver ejercicios, dan las mantisas de los logaritmos de base 10, comprendidos entre 1 y 10 000. Esos *logaritmos decimales* suelen llamarse también *logaritmos vulgares* o de *Briggs* (inglés, (1556-1631), siendo este el nombre de su inventor. Se aplican en la práctica, sobre todo en los cálculos trigonométricos que requiere la Topografía por la facilidad con que se determinan sus características y, en consecuencia, el número de cifras enteras o de ceros que tienen delante de su primera cifra significativa, los resultados.

En cambio en otras ramas de la Matemática, por ejemplo en Análisis Matemático se emplean, casi exclusivamente, los logaritmos llamados *naturales* o *Neperianos*, en honor de su inventor, Juan Neper (inglés, 1550-1617), debido a las simplificaciones que gracias a ellos se introducen en las fórmulas que intervienen en esta parte de la Matemática. Tienen, además, importantes aplicaciones en la Técnica, la Economía y la Estadística.

La *base de los logaritmos neperianos* es un número irracional que se representa con la letra minúscula e y cuyas diez primeras cifras son:

$$e = 2{,}718\,281\,828\,4\ldots\ldots\ldots$$

Como la definición de logaritmos y las propiedades de los mismos no dependen de la base que se tome, resulta, de acuerdo a lo definido y demostrado para los logaritmos de base cualquiera:

Si $\quad \log_e a = b \quad$ es $\quad e^b = a \quad$ o bien $\quad e^{\log_e a} = a$

$$\log_e (a \times b) = \log_e a + \log_e b \quad ; \quad \log_e (a : b) = \log_e a - \log_e b \quad ; \quad \text{etc.}$$

VIII) Cambio de base. — Daremos ahora la solución del problema denominado "de cambio de base", para el caso de:

Calcular el logaritmo neperiano de un número conociendo el logaritmo decimal del mismo y recíprocamente.

Sea, por ejemplo, hallar el logaritmo neperiano de un número cualquiera, por ejemplo 6345.

Llamando x al logaritmo buscado, se tiene que:

si $\quad \log_e 6345 = x \quad$ es $\quad e^x = 6345 \quad$ por def. de log.

Tomando logaritmos decimales de ambos miembros de esta igualdad y teniendo presente que el logaritmo de una potencia (cualquiera que sea la base del sistema) es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de la potencia, resulta: $\quad x \log e = \log 6345$

y reemplazando x por su igual $\log_e 6345$, se tiene

$$\log_e 6345 \,.\, \log e = \log 6345$$

de donde $\quad \log_e 6345 = \dfrac{\log 6345}{\log e} = \dfrac{1}{\log e} \,.\, \log 6345$

El $\log 6345 = 3{,}80243$ lo sacamos de la tabla de logaritmos decimales que usamos, y el $\log e$ es una constante, denominada *módulo*, que se representa por la letra mayúscula M.

Siendo $\quad \log e = M$ es $\quad \dfrac{1}{\log e} = \dfrac{1}{M} = 2{,}302\,585\,09\ldots\ldots$

Luego $\quad \log_e 6345 = \dfrac{1}{M} \times \log 6345$

o sea $\quad \log_e 6345 \cong 2{,}30258 \times 3{,}80243 \cong 8{,}75540$

En general, se obtiene con el mismo procedimiento que

$$\boxed{\log_e a = \frac{1}{M} \,.\, \log a} \quad [1] \quad \therefore \quad \boxed{\log a = M \,.\, \log_e a} \quad [2]$$

Las expresiones recuadradas indican que:

El logaritmo neperiano de un número se obtiene multiplicando el recíproco $\dfrac{1}{M} = 2{,}30258\ldots$ *del módulo, por el logaritmo decimal de ese número, y el logaritmo decimal de un número resulta de multiplicar al módulo* $M = 0{,}43429\ldots$ *por el logaritmo neperiano de ese número.*

Ejemplos. — I) Hallar *a*) el $\log_e 100$; *b*) el $\log 2$.

$$\log_e 100 \cong 2{,}30258 \times \log 100 \cong 2{,}30258 \times 2 = 4{,}60516$$

$$\log 2 = M \log_e 2 \,.\, \cong 0{,}43429 \,.\, 0{,}69315 = 0{,}30103$$

El logaritmo neperiano de un número suele representarse también con el símbolo *ln*. Empleando esta notación tendríamos:

$$ln\ 6345 = 8{,}75540 \qquad ln\ 100 = 4{,}60516$$

IX) **Observaciones.** — *a*) El logaritmo neperiano de un número es mayor que el logaritmo decimal del mismo.

b) Las reglas para determinar la característica del logaritmo decimal de un número no son aplicables para obtener la característica de su logaritmo neperiano.

Los manuales técnicos traen valores de los logaritmos neperianos. El de Hütte, por ejemplo, da los de los números desde 1 a 1050.

La Tabla de Logaritmos de J. Hoüel da en la pág. 104 los 100 primeros múltiplos de M y de $\frac{1}{M}$ con 8 cifras decimales que permiten la conversión de logaritmos neperianos en decimales y recíprocamente, mediante simples sumas, como se puede apreciar en los siguientes

EJEMPLOS. — I) Siendo $\log 4398 = 3{,}64326$

es
$$\ln 4398 = \frac{1}{M} \cdot 3{,}64326 = 8{,}988915 \cong 8{,}98892$$

porque por la tabla de múltiplos de $\frac{1}{M}$, se tiene

para	3,6 —	8,889306
,, +	43 —	0,099011
,,	26	0,000598

II) Siendo $\ln 756 = 6{,}62804$ es

$$\log 756 = M \cdot 6{,}62804 = 2{,}878520$$

porque por la tabla de múltiplos de M se tiene

para	6,6 —	2,866343
,, +	28 —	0,012160
,,	04	0,000017

Calcular:

a) $\ln 100$; *b*) $\ln 45{,}8$; *c*) $\ln 0{,}327$

d) $\ln 47008$; *e*) $\ln 0{,}00174$; *f*) $\ln 3270$

R: *a*) 4,60517 ; *b*) 3.82499 ; *c*) — 1,11779

d) 10,75807 ; *e*) — 2;75945 ; *f*) 8,09255

Solución del c) $\log 0{,}327 = \bar{1},51455 = -1 + 0{,}51455 = -0{,}48545$

es
$$\ln 0{,}327 = -\frac{1}{M} \cdot 0{,}48545 = -1{,}117788 \cong -1{,}11779$$

porque por la tabla de múltiplos de $\frac{1}{M}$, se tiene

para	48 —	1,105240
,, +	54 —	0,012433
,,	5	0,000115

X) **Aplicaciones.** — **1.** *La fórmula* $y = \tilde{N}_0 e^{5t}$ *permite calcular el número de bacterias existentes en cierto cultivo al cabo del tiempo t. Calcular a) ¿cuántas bacterias hay en el instante presente? b) ¿Al cabo de cuánto tiempo se duplicará ese número?*

R: *a*) N_0 ;

b) $t = 0{,}13863$ s porque siendo $y = 2\tilde{N}_0$ es $2\tilde{N}_0 = \tilde{N}_0 e^{5t}$

y dividiendo por $N_0 \neq 0$ da $2 = e^{5t}$ y tomando log. neper. de ambos miembros $\ln 2 = 5t$ ∴

$$t = \frac{\ln 2}{5} \cong \frac{0{,}69315}{5} = 0{,}13863$$

2. *Calcular al cabo de cuánto tiempo cierta cantidad* k_0 *de radium se reduce a la mitad sabiendo que la fórmula que da la cantidad y que no se ha desintegrado al cabo de t siglos es* $y = k_0 e^{-0{,}038t}$

R: $t = 18{,}24$ siglos porque siendo $2k_0 = k_0 e^{-0{,}038t}$ es $2 = e^{-0{,}038t}$

luego $\ln 2 = -0{,}038t$ ∴ $t = \frac{\ln 2}{-0{,}038} = \frac{0{,}69315}{-0{,}038} \cong -18{,}24$

3. *Calcular al cabo de cuántos años un capital de 30 000 \$ colocado a interés compuesto con capitalización continua al 5 % anual dan un monto de 54 664 \$.*

SOLUCIÓN. — Se estudia en Matemática Financiera que el monto C_n de un capital C colocado al tanto por uno *i* con capitalización continua es al cabo de *n* años:
$$C_n = C \cdot e^{ni}$$

luego
$$54\,664 = 30\,000 \cdot e^{n\,0{,}05}$$

y tomando *ln* de ambos miembros se tiene:
$$\ln 54\,664 = \ln 30\,000 + n\,0{,}05$$

de donde
$$n = \frac{\ln 54\,664 - \ln 30\,000}{0{,}05} = 12 \text{ años}.$$

X′) **Ejercicios de aplicación de las propiedades de las raíces. — 1.** *Si* x_1 *y* x_2 *son las raíces de* $x^2 + px + q = 0$, *hallar sin resolverla:*

a) $x_1^2 + x_2^2$; b) $x_1^3 + x_2^3$; c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

d) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; e) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$; f) $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$

R: a) $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$ porque siendo $x_1 + x_2 = -p$ es $(x_1+x_2)^2 = p$

luego $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = p^2$ $\therefore$ $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$ porque $x_1x_2 = q$

b) $x_1^3 + x_2^3 = 3pq - p^3$ porque siendo $(x_1 + x_2)^3 = -p^3$

es $x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 = -p^3$ por cubo binomio

o bien $x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -p^3$ por prop. com. y fac. común, de

donde $x_1^3 + x_2^3 = -p^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -p^3 - 3q(-p)$ por prop. raíces

luego $x_1^3 + x_2^3 = 3pq - p^3$

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-p}{q}$ porque

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{-p}{q}$ por suma de fracs. y prop. raíces

d) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{p^2 - 2q}{q}$ porque

$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_2 x_1} = \frac{p^2 - 2q}{q}$ por suma fracs. ejerc. a) y prod. raíces

e) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = -pq$ porque

$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = q(-p) = -pq$

f) $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 x_2} = \frac{3pq - p^3}{q}$ por ejerc. b) y prod. raíces.

2. *Calcular para qué valores de* p *las raíces* x_1 *y* x_2 *de la ecuación*

$$x^2 + px - 6 = 0 \quad \textit{son tales que}$$

a) $x_1 + x_2 = x_1 x_2$; b) $x_1^2 + x_2^2 = 37$

R: a) $p = 6$; b) $p = \pm 5$

3. *Calcular para qué valores de* c *las raíces de la ecuación* $2x^2 - 3x + c = 0$ *son tales que:*

a) $2(x_1 + x_2) + x_1 x_2 = -2$; b) $x_1^2 + x_2^2 = 1{,}25$; c) $x_1 = x_2$

R: a) $c = -10$; b) $c = 1$; c) $c = \frac{9}{8}$

4. *Dada la ecuación* $x^2 - 5x + 6 = 0$ *formar la ecuación cuyas raíces sean iguales a las de la dada: a) aumentadas en 1; b) disminuídas en 1; c) multiplicadas por 2; d) los números contrarios de esas raíces; e) sus inversos, sin resolver la ecuación dada.*

R: a) $x^2 - 7x + 12 = 0$; b) $x^2 - 3x + 2 = 0$; c) $x^2 - 10x + 24 = 0$

d) $x^2 + 5x + 6 = 0$; e) $6x^2 - 5x + 1 = 0$

XI) **Descomposición factorial del trinomio de segundo grado** — *Toda función racional entera de segundo grado, o trinomio de segundo grado, puede descomponerse en el producto de tres factores que son: el coeficiente del término de segundo grado, y las diferencias entre la variable y las raíces de la ecuación que resulta de igualar a 0 el trinomio.*

En símbolos:

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad [1]$$

siendo x_1 y x_2 las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

En efecto: siendo el trinomio de 2º grado es $a \neq 0$, luego sacando a como factor común en el segundo miembro de [1], se tiene:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \quad [2]$$

Para $y = 0$ es $ax^2 + bx + c = 0$ una ecuación de segundo grado cuyas raíces x_1 y x_2 cumplen las propiedades (*Aritmética y Algebra*, IV curso, pág. 151).

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \therefore \quad \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) \; ; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Reemplazando en [2] $\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{a}$ por sus iguales resulta:

$$y = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 x_2\right]$$

efectuando el producto indicado en el corchete, da:

$$y = a\left[x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2\right]$$

Sacando x como factor común entre los dos primeros términos del corchete y $-x_2$ entre los dos últimos se tiene

$$y = a\left[x\,(x - x_1) - x_2\,(x - x_1)\right]$$

y sacando factor común a $x - x_1$ resulta

$$\boxed{y = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)}$$

Ejemplo. — *Dado el trinomio* $y = 3x^2 + 3x - 18$, para $y = 0$ se convierte en la ecuación

$$3x^2 + 3x - 18 = 0$$

cuyas raíces son:

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{9 + 216}}{6} = \frac{-3 + \sqrt{225}}{6} = \frac{-3 + 15}{6} = 2\ ;$$

$$x_2 = \frac{-3 - 15}{6} = -3$$

luego $\quad y = 3\,(x - 2)\left[x - (-3)\right] = 3\,(x - 2)\,(x + 3).$

XII) Aplicación a la simplificación de fracciones. — Dada la fracción

$$\frac{4x^2 - 17x - 15}{8x^2 + 38x + 24}$$

cuyos términos son trinomios de segundo grado reemplazándolos por su descomposición factorial, se tiene:

$$\frac{4x^2 - 17x - 15}{8x^2 + 38x + 24} = \frac{4\ (x - 5)\left(x + \frac{3}{4}\right)}{8\left(x + \frac{3}{4}\right)(x + 4)}$$

y eliminando los factores comunes, 4 y $\left(x + \frac{3}{4}\right)$, queda:

$$\frac{4x^2 - 17x - 15}{8x^2 + 38x + 24} = \frac{x - 5}{2\,(x + 4)}$$

XIII) Forma canónica del trinomio de segundo grado. — El trinomio de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$, suele expresarse de otra manera, denominada *forma canónica* que facilita, como veremos, el cálculo de su valor *máximo* o *mínimo*. Para lograr esa forma basta seguir los siguientes pasos (indicados en *Aritmética y Algebra*, 4º curso, pág. 191):

1º) Sacar a factor común:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\right)$$

2º) Sumar y restar dentro del paréntesis $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

con lo que se tiene $\quad y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$

3º) Reemplazar los tres primeros términos del paréntesis por el cuadrado del binomio del cual es el desarrollo, reducir los otros dos términos, y da:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

4º) Efectuar el producto por a y simplificar

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad (*)$$

que es la *forma canónica* buscada.

Ejemplo. — *Escribir en forma canónica el trinomio*

$$y = 2x^2 - 8x + 12$$

Siguiendo los pasos indicados en el párrafo anterior se tiene:

1º) $\quad y = 2\,(x^2 - 4x + 6)$

2º) Sumando y restando 4 dentro del paréntesis

$$y = 2\,(x^2 - 4x + 4 - 4 + 6)$$

3º) Reemplazando al trinomio cuadrado perfecto y a $-4 + 6$ por sus iguales,

$$y = 2\left[(x - 2)^2 + 2\right]$$

4º) Efectuando el producto por 2, se tiene

$$y = 2\,(x - 2)^2 + 4 \quad \therefore \quad y - 4 = 2\,(x - 2)^2$$

(*) No es necesario tratar de retener de memoria esta expresión. Para resolver los ejercicios basta seguir los pasos que se han indicado.

XIV) Valor máximo o mínimo del trinomio de segundo grado. — *El trinomio* $y = ax^2 + bx + c$, *si* $a < 0$, *adquiere su valor máximo para* $x = -\dfrac{b}{2a}$ es decir: *el valor de y correspondiente a ese valor de x es mayor que cualquier otro valor que pueda adquirir el trinomio.*

En efecto: escribiendo el trinomio en forma canónica

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

resulta que siendo $a < 0$ y $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqq 0$ por ser el cuadrado de un número real es

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leqq 0 \quad \text{por regla signos mult.}$$

y como por car. idént. $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = constante$

para todo x, es

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \leqq - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad \text{por ley mon. rest.}$$

y por lo tanto $$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \geqq y$$

En particular: para

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \text{es} \quad -\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} = 0 \quad \text{e} \quad y_{máx} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Análogamente: si $a > 0$ el valor que toma el trinomio para $x = -\dfrac{b}{2a}$ es *menor* que cualquier otro valor que tome para $x \neq -\dfrac{b}{2a}$, porque siendo

$$a > 0 \quad \text{y} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqq 0$$

es, por regla signos mult. $$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqq 0$$

y como $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = constante$

para todo x, es

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \geqq - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad \text{por ley mon. rest.}$$

y por lo tanto $$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \leqq y$$

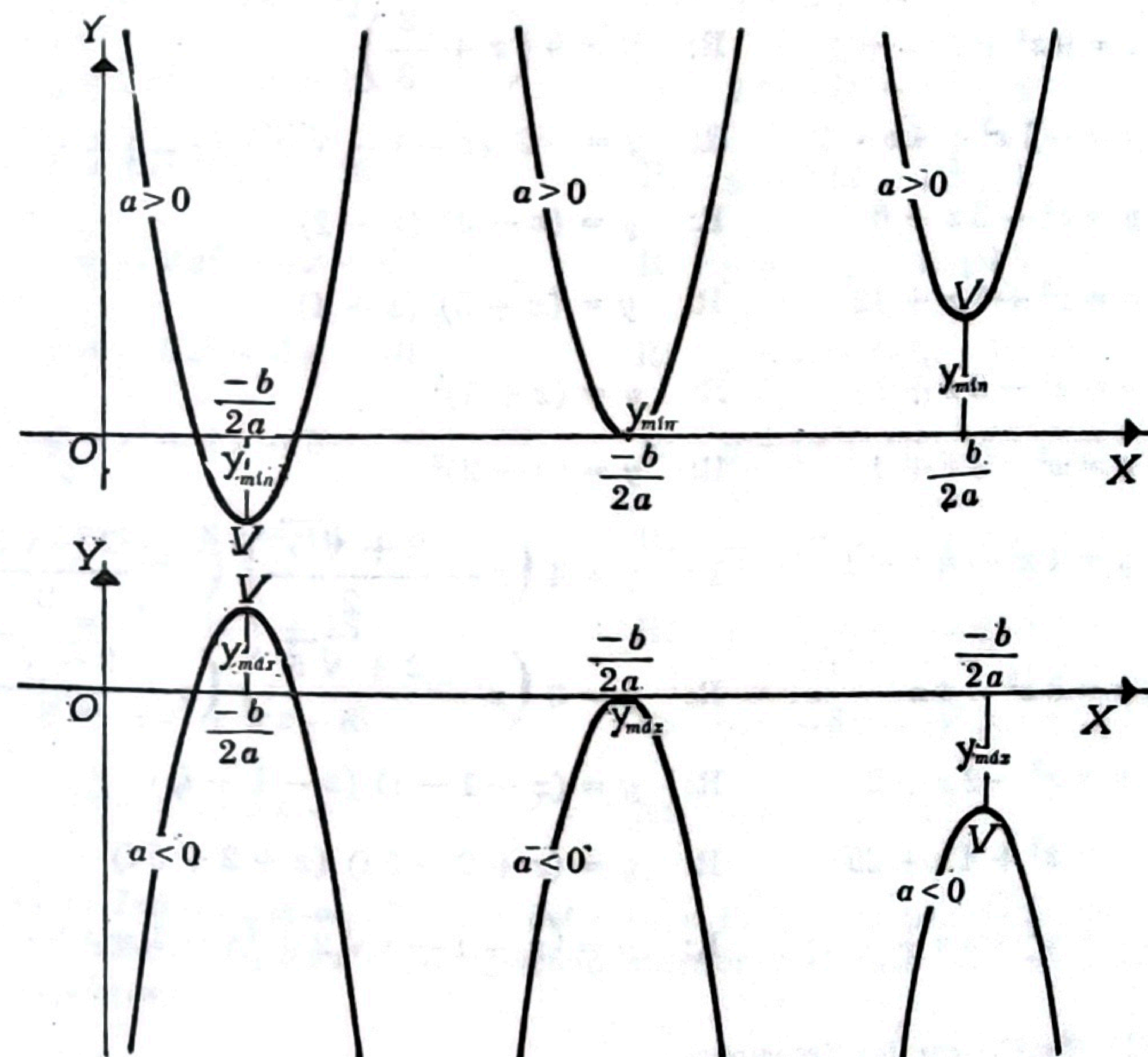
En particular: como para $x = \dfrac{b}{2a}$ es $-\dfrac{b}{2a} + \dfrac{b}{2a} = 0$

resulta $$y_{mín} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Como se indicó en la pág. 159, los valores

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

son los de las *coordenadas del vértice* de la parábola que representa gráficamente al trinomio. Es el punto de la figura de *menor* o *mayor* ordenada según que sea $a > 0$ ó $a < 0$, respectivamente.



XV) Ejercicios. — *Descomponer en forma factorial los trinomios:*

1. $y = 2x^2 - 5x + 2$ R: $y = 2(x - 2)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

2. $y = 2x^2 - 3x - 2$ R: $y = 2(x - 2)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$

3. $y = 2x^2 + 3x - 2$ R: $y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2)$

4. $y = 2x^2 + 5x + 2$ R: $y = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 2)$

5. $y = 5x^2 + 17x + 12$ R: $y = 5(x + 1)(x + 2{,}4)$

6. $y = -5x^2 + 17x + 12$ R: $y = -5(x - 4)(x + 0{,}6)$

7. $y = -5x^2 - 17x + 12$ R: $y = -5(x - 0{,}6)(x + 4)$

8. $y = 4x^2 - 4x + 1$ R: $y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

9. $y = 9x^2 + 12x + 4$ R: $y = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2$

10. $y = -2x^2 + 4x + 2$ R: $y = -2(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$

11. $y = x^2 - 5x + 6$ R: $y = (x - 3)(x - 2)$

13. $y = x^2 + 7x + 12$ R: $y = (x + 3)(x + 4)$

14. $y = x^2 + 2x + 1$ R: $y = (x + 1)^2$

15. $y = x^2 - 4x + 4$ R: $y = (x - 2)^2$

16. $y = 4x^2 - 8x - 1$ R: $y = 4\left(x - \frac{2 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{2 - \sqrt{5}}{2}\right)$

17. $y = 3x^2 - 4x - \frac{1}{3}$ R: $y = 3\left(x - \frac{2 + \sqrt{5}}{3}\right)\left(x - \frac{2 - \sqrt{5}}{3}\right)$

18. $y = x^2 - 2x + 2$ R: $y = (x - 1 - i)(x - 1 + i)$

19. $y = x^2 + 4x + 29$ R: $y = (x + 2 - 5i)(x + 2 + 5i)$

20. $y = x^2 - 2x + 3$ R: $y = (x - 1 - i\sqrt{2})(x - 1 + i\sqrt{2})$

XVI) *Simplificar las fracciones:*

1. $\frac{x - 5}{x^2 - x - 20}$ R: $\frac{1}{x + 4}$ 2. $\frac{x + 5}{x^2 + x - 20}$ R: $\frac{1}{x - 4}$

3. $\frac{x - 3}{x^2 + x + 12}$ R: $\frac{1}{x + 4}$ 4. $\frac{x + 3}{x^2 - x - 12}$ R: $\frac{1}{x - 4}$

5. $\frac{x^2 - 16}{x^2 + 7x + 12}$ R: $\frac{x - 4}{x + 3}$ 6. $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 6}$ R: $\frac{x + 1}{x - 3}$

7. $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ R: $\frac{x + 2}{x - 2}$ 8. $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$ R: $\frac{x + 1}{x + 2}$

9. $\frac{2x^2 - 5x + 2}{2x^2 - 3x - 2}$ R: $\frac{2x - 1}{2x + 1}$ 10. $\frac{2x^2 + 3x - 2}{2x^2 + 5x + 2}$ R: $\frac{2x - 1}{2x + 1}$

XVII) *Escribir en forma canónica:*

1. $y = 2x^2 - 4x - 6$ R: $y = 2(x - 1)^2 - 8$

2. $y = 2x^2 - 4x + 10$ R: $y = 2(x - 1)^2 + 8$

3. $y = 3x^2 - 6x + 10$ R: $y = 2(x - 1)^2 + 7$

4. $y = -2x^2 + 4x + 6$ R: $y = -2(x - 1)^2 + 8$

5. $y = -3x^2 - 6x + 10$ R: $y = -3(x + 1)^2 + 13$

6. $y = x^2 + 2x - 5$ R: $y = (x + 1)^2 - 6$

7. $y = x^2 - 6x + 16$ R: $y = (x - 3)^2 + 7$

8. $y = x^2 + 10x + 23$ R: $y = (x + 5)^2 - 2$

9. $y = -x^2 + 2x - 5$ R: $y = -(x - 1)^2 - 4$

10. $y = -x^2 + 2x - 1$ R: $y = -(x - 1)^2$

XVIII) *Indicar las coordenadas del vértice V de cada una de las parábolas cuyas ecuaciones figuran en el ejercicio anterior y el valor máximo o mínimo que adquieren.*

1. V (1; −8); $y_{mín} = -8$ 2. V (1; 8); $y_{mín} = 8$

3. V (1; 7); $y_{mín} = 7$ 4. V (1; 8); $y_{máx} = 8$

5. V (−1; 13); $y_{máx} = 13$ 6. V (−1; −6); $y_{mín} = -6$

7. V (3; 7); $y_{mín} = 7$ 8. V (−5; −2); $y_{mín} = -2$

9. $V(1;\ -4);\quad y_{máx} = -4$ **10.** $V(\ 1;\ \ 0);\quad y_{máx} = 0$

Solución del **9**: Siendo $y = -(x-1)^2 - 4$ es $y + 4 = -(x-1)^2$ [1]

Haciendo $x - 1 = x' \quad \therefore \quad x = x' + 1$ e $y + 4 = y' \quad \therefore \quad y = y' - 4$

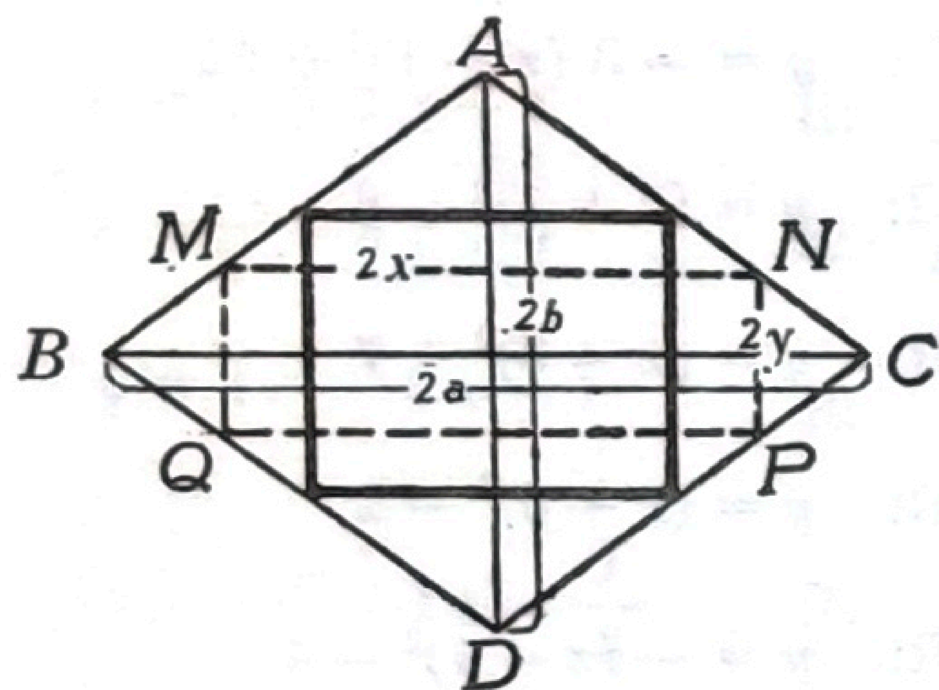
la ecuación [1] se transforma en la $y' = -x'^2$ que es la ecuación de una parábola (*Aritmética y Algebra*, pág. 188), cuyo vértice V tiene por coordenadas $x' = 0$ e $y' = 0$, luego

$$x = x' + 1 = 0 + 1 = 1 \quad \text{e} \quad y = y' - 4 = 0 - 4 = -4$$

Las ordenadas de los puntos de esa parábola adquieren su *máximo* (pues $a = -1 < 0$) en el vértice luego es $y_{máx} = -4$.

XIX) *Hallar entre todos los rectángulos inscriptos en un rombo de diagonales dadas, el de área máxima.*

Solución. — Llamando $2a$ y $2b$ a las medidas de las diagonales del rombo, tomadas con respecto a la misma unidad, y $2x$ y $2y$ a las de la base y de la altura de un rectángulo MNPQ inscripto en ese rombo, su área es



$$A = 2x \cdot 2y = 4xy \quad [1]$$

Siendo $\overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$ por el teor. fund.

la razón entre las bases es igual a la de las alturas homólogas (Matemáticas, III, pág. 298) o sea

$$\frac{2x}{2a} = \frac{\dfrac{2b - 2y}{2}}{b} \quad \therefore \quad \frac{x}{a} = \frac{b - y}{b} \quad \therefore \quad bx = ab - ay$$

$$\therefore \quad y = \frac{b(a - x)}{a} \quad [2]$$

y reemplazando en [1]

$$A = 4x\,\frac{b(a-x)}{a} = 4bx - \frac{4b}{a}x^2 = -\frac{4b}{a}x^2 - 4bx$$

Como a y b son positivos es $-\dfrac{4b}{a}$ negativo, luego la función racional entera

$$A = -\frac{4b}{a}x^2 - 4bx$$

adquiere un valor máximo para el valor del argumento

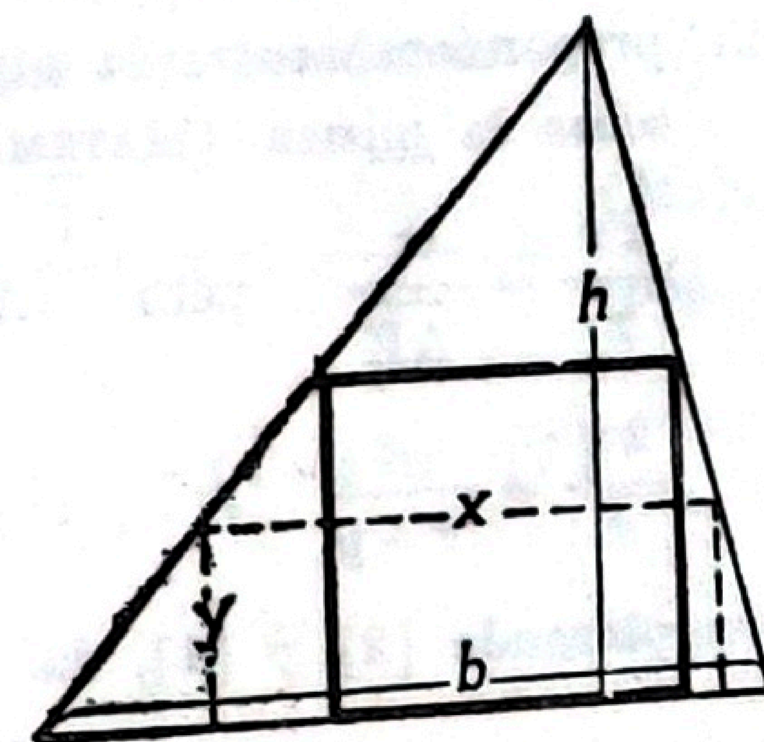
$$x = \frac{-4b}{-2 \cdot \dfrac{4b}{a}} = \frac{a}{2} \quad \text{(pág. 220)}$$

Reemplazando este valor de x en [2], se tiene:

$$y = \frac{b\left(a - \dfrac{a}{2}\right)}{a} = \frac{\dfrac{ab}{2}}{a} = \frac{b}{2}$$

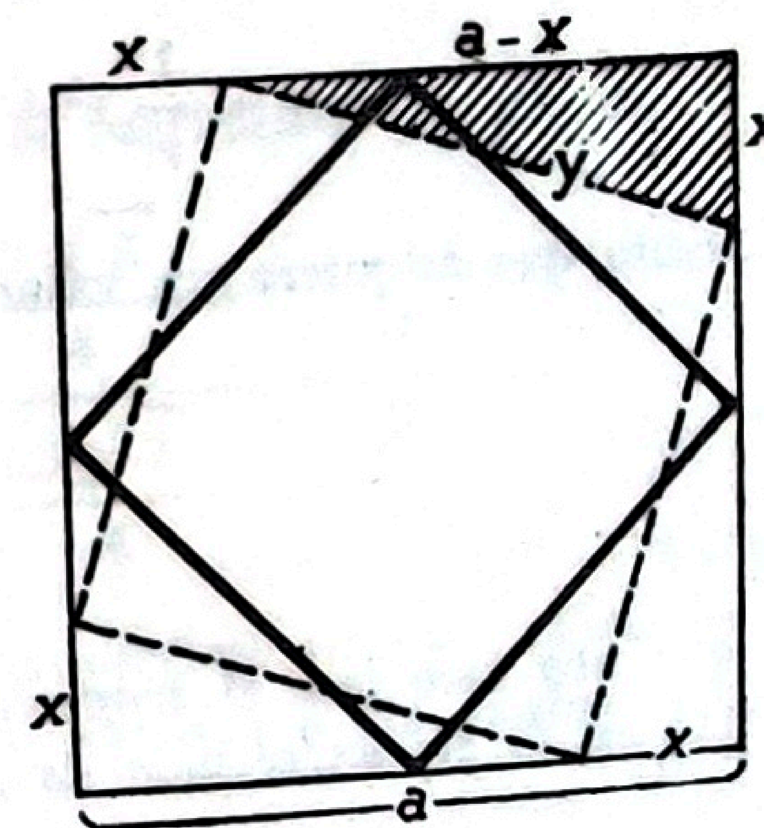
Los valores obtenidos para x e y indican que *entre los rectángulos inscriptos en un rombo el de área máxima es el que tiene por vértices a los puntos medios de los lados del rombo.*

XX) *Hallar entre todos los rectángulos inscriptos en un triángulo de base y altura dadas y con un lado paralelo a uno del triángulo, el de área máxima.*



R: es el rectángulo cuya altura es igual a la mitad de la del triángulo. (Sígase el procedimiento empleado en el ejercicio anterior).

XXI) *Hallar entre todos los cuadrados inscriptos en otro dado el de área mínima.*



Solución. — Llamando y a la medida del lado de un cuadrado inscripto su área es $A = y^2$, y por el teorema de Pitágoras

$$y^2 = x^2 + (a - x)^2$$

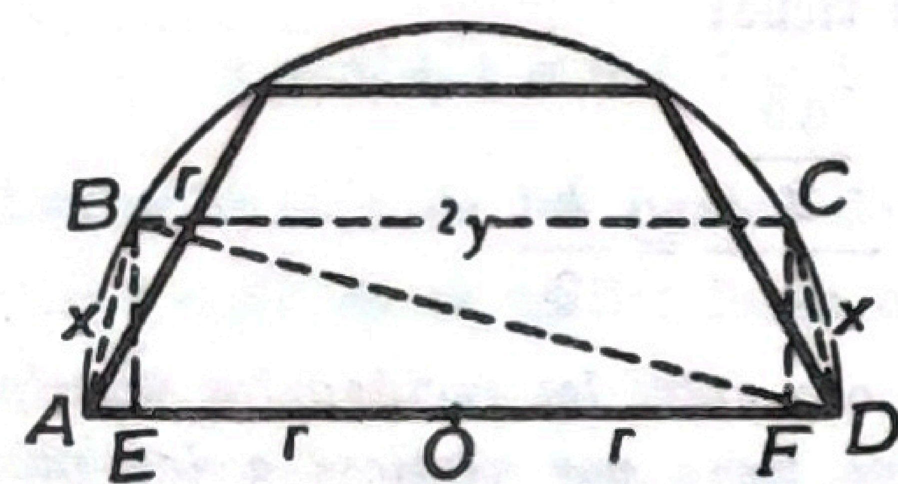
luego $\quad A = 2x^2 - 2ax + a^2$

Esto trinomio adquiere un valor *mínimo*, pues el coeficiente de x^2 es $2 > 0$,

para el valor del argumento $x = -\frac{-2a}{2 \cdot 2} = \frac{a}{2}$

que nos indica que el *cuadrado pedido es el que tiene por vértices los puntos medios de los lados del cuadrado dado.*

XXII) *Hallar entre todos los trapecios isósceles inscriptos en una semicircunferencia de diámetro dado 2r el de perímetro máximo.*



SOLUCIÓN. — Llamando x a la medida del lado igual, $2y$ a la de la base menor, y $2p$ a la del perímetro del trapecio, es

$$2p = 2x + 2y + 2r \quad [1]$$

Uniendo B con D se obtiene el Δ A B D rectángulo por ser $A\hat{B}D$ inscripto en una semicircunferencia (MATEMÁTICAS, II, pág. 364), luego el cateto x es medio proporcional entre la hipotenusa $\overline{AD} = 2r$ y la proyección $\overline{AE}$ de ese cateto sobre la misma (MATEMÁTICAS, III, pág. 318) o sea

$$\frac{2r}{x} = \frac{x}{\overline{AE}} \quad \text{pero} \quad \overline{AE} = \frac{2r - 2y}{2} = r - y \quad \text{pues} \quad \overline{AE} = \overline{FD}$$

luego $\frac{2r}{x} = \frac{x}{r-y}$ $\therefore$ $x^2 = 2r(r-y)$ $\therefore$ $y = \frac{2r^2 - x^2}{2r}$ [2]

Reemplazando [2] y [1], da

$$2p = 2x + 2\frac{2r^2 - x^2}{2r} + 2r = 2x + 2r - \frac{x^2}{r} + 2r$$

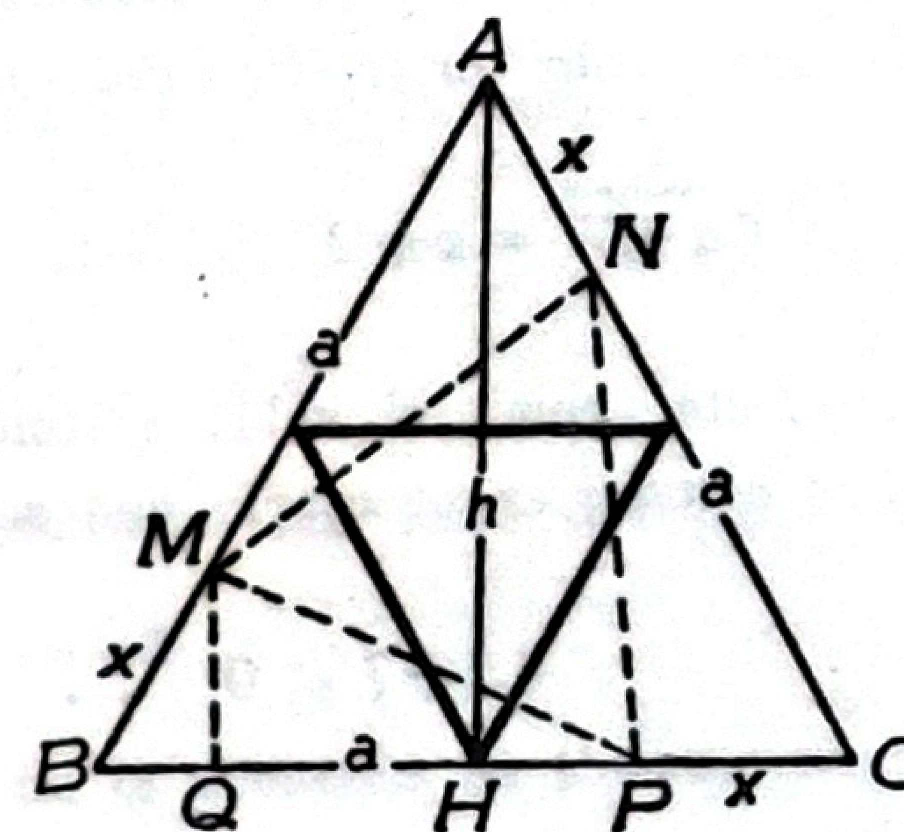
$$2p = -\frac{1}{r}x^2 + 2x + 4r$$

trinomio que adquiere un valor *máximo*, pues $-\frac{1}{r} < 0$, para

$$x = -\frac{2}{2\left(-\frac{1}{r}\right)} = r$$

lo que nos dice que el *trapecio pedido es la mitad del hexágono regular inscripto en la circunferencia de radio r.*

XXIII) *Hallar entre todos los triángulos equiláteros inscriptos en uno de lado dado a el de superficie mínima.*



SOLUCIÓN. — Tomando

$$\overline{BM} = \overline{AN} = \overline{CP} = x$$

se obtienen los vértices del triángulo equilátero MNP inscripto en el dado ABC. Llamando y a su superficie es

$$y = sup.\ \overset{\Delta}{ABC} - 3\ sup.\ \overset{\Delta}{BMP} \quad [1]$$

pero el $\quad Sup.\ \overset{\Delta}{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ [2] (MATEMÁTICAS, III°, pág. 325)

y $\quad Sup.\ \overset{\Delta}{BMP} = \frac{1}{2}.\overline{BP}.\overline{MQ}$ siendo $MQ \perp BC$

Como $\overset{\Delta}{MQB} \sim \overset{\Delta}{AHB}$ por ser rectgs. y tener $\hat{B}$ común, es

$$\frac{\overline{MQ}}{h} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BA}} \quad \therefore \quad \overline{MQ} = \frac{h}{a}.x = \frac{a\sqrt{3}}{a\,2}.x = \frac{\sqrt{3}}{2}.x$$ (MAT. III, pág. 326)

luego $\quad Sup.\ \overset{\Delta}{BMP} = \frac{1}{2}(a-x).\frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}(a-x)x$ [3]

Reemplazando [2] y [3] en [1], resulta:

$$y = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}(a-x)x = \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}ax + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

trinomio que adquiere un valor *mínimo*, porque el coeficiente de x^2 es

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} > 0, \quad \text{para} \quad x = -\frac{-\frac{3\sqrt{3}}{4}a}{2\,\frac{3\sqrt{3}}{4}} = \frac{a}{2}$$

valor que indica que el *triángulo equilátero de superficie mínima inscripto en un triángulo equilátero dado, es el que tiene por vértices a los puntos medios de los lados del triángulo dado.*

XXIV) Ecuaciones irracionales. — *Hallar los valores reales de x que satisfacen a las ecuaciones siguientes, teniendo en cuenta que con el signo* $\sqrt{\ }$ *se indica el valor aritmético del radical.*

1. $\sqrt{6x+7} = x+2$ R: $x_1 = 3,\ x_2 = -1$

En efecto: como el valor aritmético del radical debe ser un *número real positivo o nulo*, es necesario que sea

$$6x+7 \geqq 0 \quad \therefore \quad x \geqq -\frac{7}{6} = -1\frac{1}{6} \quad [1]$$

en cuyo caso como es también $x+2 > 0$ porque lo es si

$$x > -2 \quad \text{y} \quad -1\frac{1}{6} > -2$$

Para todo x que cumpla esa condición, si se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación se tiene:

$$6x+7 = (x+2)^2 = x^2+4x+4 \quad \therefore \quad x^2-2x-3 = 0$$

y $x = 1 \pm \sqrt{1-(-3)} = 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2 \quad \therefore \quad x_1 = 3,\ x_2 = -1$

Estos números son raíces de la ecuación dada porque cumplen la condición [1] y, además:

$$\sqrt{6 \,.\, 3+7} = \sqrt{18+7} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{y} \quad 3+2 = 5$$

$$\sqrt{6 \,.\, -1+7} = \sqrt{-6+7} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{y} \quad -1+2 = 1$$

2. $\sqrt{x-3} = x-5$ R: $x_1 = 7,\ x_2 = 4$ *sol. extraña*

3. $\sqrt{3x+1} = 3x-11$ R: $x_1 = 5,\ x_2 = \frac{8}{3}$ „ „

4. $\sqrt{x+2} - 3 = 0$ R: $x = 7$

5. $3\sqrt{2x+3} - 2 = 7$ R: $x = 3$

6. $x - \sqrt{x} - 2 = 0$ R: $x_1 = 4,\ x_2 = 1$ *sol. extraña*

7. $\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2+3x+2}$ R: $x_1 = x_2 = -1$

8. $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3} = \sqrt{2x-8}$ R: $x_1 = 5,\ x_2 = -5$ *sol. extraña*

porque para que los valores aritméticos de los radicales sean reales debe ser

$$x+3 \geqq 0 \quad \therefore \quad x \geqq -3\,; \qquad x-3 \geqq 0 \quad \therefore \quad x \geqq 3$$

$$2x-8 \geqq 0 \quad \therefore \quad x \geqq 4$$

y

cumpliéndose esta última condición se satisfacen las otras dos porque

$$4 > 3 > -3$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, se tiene:

$$x+3-2\sqrt{x^2-9}+x-3 = 2x-8$$

Reduciendo términos y aislando el radical da

$$\sqrt{x^2-9} = 4$$

Elev. al cuadrado $\quad x^2-9 = 16 \quad \therefore \quad x^2 = 25 \quad$ y $\quad x_1 = 5,\ x_2 = -5$

Este último valor se desecha porque $-5 < 4$.

Como $\sqrt{5+3} - \sqrt{5-3} = \sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$

$$\text{y} \quad \sqrt{2 \,.\, 5-8} = \sqrt{10-8} = \sqrt{2}$$

es $x_1 = 5$ raíz de la ecuación dada.

9. $\sqrt{2x+5} = 1 - \sqrt{x+2}$ R: $x_1 = 2$ *sol. extraña*, $x_2 = -2$

10. $(3x-4)^{\frac{1}{2}} + (4x+3)^{\frac{1}{2}} = 0$ R: $x_1 = x_2 = -7$ *sol. extraña*

11. $2x+2\,(16+x^2)^{\frac{1}{2}} = 80\,(16+x^2)^{\frac{1}{2}}$ R: $x_1 = 3,\ x_2 = -3$ *sol. extraña*

12. $\sqrt{x} - \sqrt{x-24} = 2$ R: $x = 49$

13. $\sqrt{6x-29} - \sqrt{x-5} = \sqrt{x}$ R: $x = 9$

14. $\sqrt{x} - \sqrt{6x-29} - \sqrt{x-5} = 0$ R: $x = \frac{16}{5}$

15. $\sqrt{x^2-3x+4} - \sqrt{x^2-5x+7} = 1$ R: $x = 3$

16. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+14}=9$ R: $x=11$

17. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}=1$ R: $x=-1$

18. $2+\sqrt{x}=\sqrt{36+x}$ R: $x=64$

19. $\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x^2-3x+1}=3$ R: $x_1=3,\ x_2=0$

20. $\sqrt{x+1}=\sqrt{2x+9}-\sqrt{x-4}$ R: $x_1=8;\ x_2=-5$ ***sol. extraña***

XXV) **Inecuaciones de segundo grado con una incógnita. —** ***Calcular analítica y gráficamente los valores reales de x que satisfacen a las inecuaciones siguientes:***

1. $x^2-4x+3<0$ R: $\{x \mid x \in R \wedge 1<x<3\}$ (*)

En efecto: sumando y restando 4 en el primer miembro da

$$x^2-4x+4-4+3<0$$

y como $x^2-4x+4=(x-2)^2$ es $(x-2)^2-1<0$

o bien

$$(x-2+1)(x-2-1)<0 \quad \text{por dif. de cuads.}$$

o sea

$$(x-1)(x-3)<0$$

Para que este producto sea negativo los factores $(x-1)$ y $(x-3)$ deben tener signos distintos, es decir, ser a la vez:

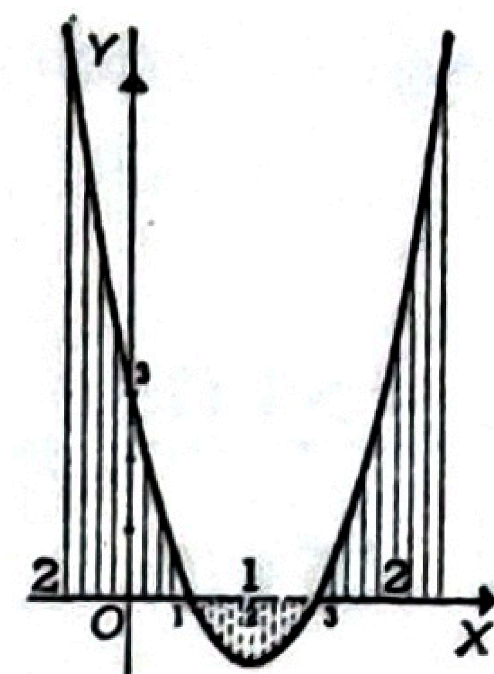
y $\left.\begin{matrix} x-1<0 \quad \therefore \quad x<1 \\ x-3>0 \quad \therefore \quad x>3 \end{matrix}\right\}$ lo cual no es posible

y a la vez $\left.\begin{matrix} x-1>0 \quad \therefore \quad x>1 \quad \therefore \quad 1<x \\ x-3<0 \quad \therefore \quad x<3 \end{matrix}\right\}$ luego $1<x<3$

(*) Se lee *el conjunto de los números reales x comprendidos entre 1 y 3* o literalmente: *el conjunto de los números x tales que x es un número real y es mayor que 1 y menor 3.*

Gráficamente. — **La gráfica de la función**

$$y=x^2-4x+3$$



es la parábola del eje || OY, vértice V(2 ; —1), que corta al eje OY en el punto de ordenada 3 porque para $x=0$ es $y=3$. Con esos elementos se la construye con el procedimiento explicado en la página 159.

El conjunto de las soluciones está formado por las abscisas de los puntos del segmento del eje OX señalado con trazo punteado (excluyendo sus extremos) porque las ordenadas y de esos puntos son negativas porque ellos están "debajo" del eje OX.

2. $x^2-4x-3\geqq 0$ R: $\{x \mid x \in R \wedge x\leqq 1 \vee x\geqq 3\}$ (*)

Gráficamente. — La figura del ejercicio anterior indica que los puntos de la gráfica que tienen ordenada nula o positiva son aquellos cuyas abscisas son las de los puntos del eje OX pertenecientes a la semirrecta de origen 1 que contiene al punto O, ó a la semirrecta de origen 3 que no contiene a O. Las ordenadas y de esos puntos son positivas porque corresponden a puntos que están "encima" del eje OX.

Analíticamente. — El procedimiento seguido en el ejercicio 1 conduce a

$$(x-1)(x-3)\geqq 0$$

de la cual se deduce que para que se cumpla la desigualdad los factores deben tener el mismo signo o sea:

y a la vez $\left.\begin{matrix} x-1>0 \quad \therefore \quad x>1 \\ x-3>0 \quad \therefore \quad x>3 \end{matrix}\right\}$ y eso se cumple si $x>3$ pues $3>1$

ó

y a la vez $\left.\begin{matrix} x-1<0 \quad \therefore \quad x<1 \\ x-3<0 \quad \therefore \quad x<3 \end{matrix}\right\}$ y eso se cumple si $x<1$ pues $1<3$

Para que se verifique la igualdad basta que sea:

$x-1=0 \quad \therefore \quad x=1$ ó $x-3=0 \quad \therefore \quad x=3$ o ambas a la vez.

(*) El conjunto de los números reales x tales que es

$$x\leqq 1 \quad \text{ó } (\vee) \quad x\geqq 3$$

Luego el conjunto de soluciones buscado es

$$\{x \mid x \in R \wedge x \leqq 1 \vee x \geqq 3\}$$

3. $x^2 > 4$ (fig. 1) R: $\{x \mid x \in R \wedge x > 2 \vee x < -2\}$

4. $x^2 \leqq 4$ (fig. 1) R: $\{x \mid x \in R \wedge x \geqq -2 \vee x \leqq 2\}$

5. $2x^2 - 5x \geqq 0$ (fig. 2) R: $\{x \mid x \in R \wedge x \leqq 0 \vee x \geqq 2{,}5\}$

6. $x^2 - x \geqq 0$ (fig. 3) R: $\{x \mid x \in R \wedge x \leqq 0 \vee x \geqq 1\}$

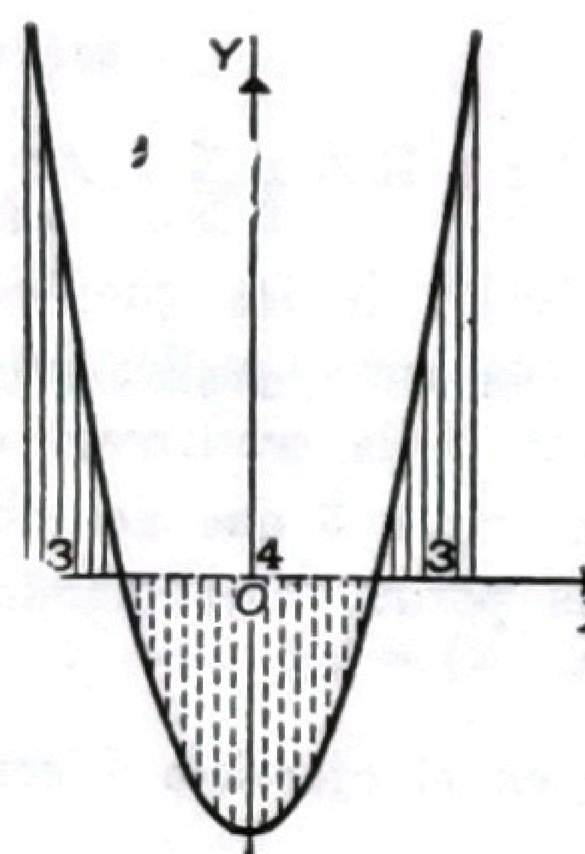


Fig. 1

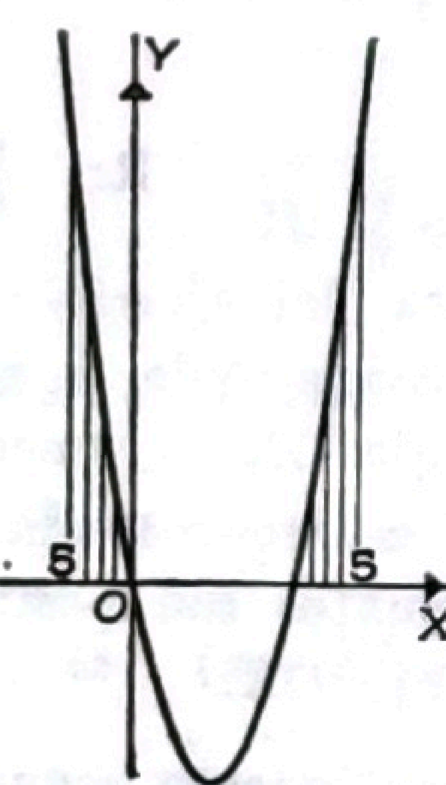


Fig. 2

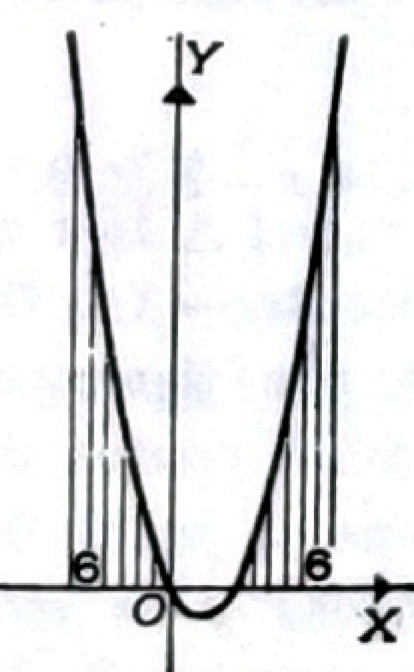


Fig. 3

7. $-2x^2 + 5x - 3 < 0$ R: $\{x \mid x \in R \wedge x < 1 \vee x > 1{,}5\}$

8. $-2x^2 + 5x - 3 < 0$ R: $\{x \mid x \in R \wedge x < 1 \vee x > 1{,}5\}$

9. $-x^2 + 10x - 21 \leqq 0$ R: $\{x \mid x \in R \wedge x \leqq 3 \vee x \geqq 4\}$

10. $x^2 + 2 \leqq 0$ R: $\{\ \}$ (*)

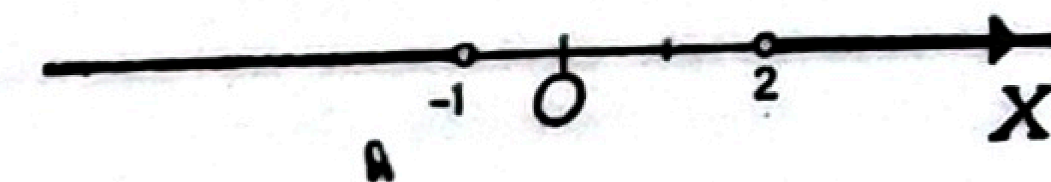
11. $x - 2y = 3$ R: $\{\ldots, (1; -1); (2; -0{,}5) \ldots, (-1; -2) \ldots\}$

(*) Con la notación $\{\ \}$ se indica el conjunto vacío, esto es, *carente de elementos.* Se explica que sea ese el conjunto de soluciones de la inecuación considerada porque el cuadrado x^2, de un número real x es positivo o nulo y sumado con el número 2 da un número positivo.

XXVI) ***Hallar el conjunto de las soluciones de las inecuaciones siguientes representarlos gráficamente.***

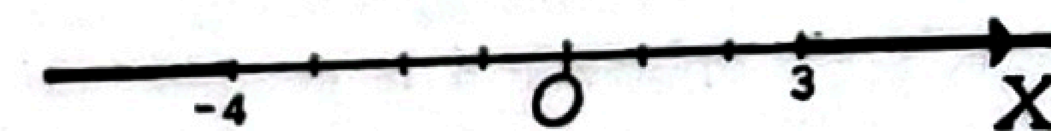
1. $(x-2)^2 < 3\,(2-x)$

R: $\{x \mid x \in R \wedge -1 < x < 2\}$



2. $x\,(x+1) \leqq 12$

R: $\{x \mid x \in R \wedge -4 \leqq x \leqq 3\}$

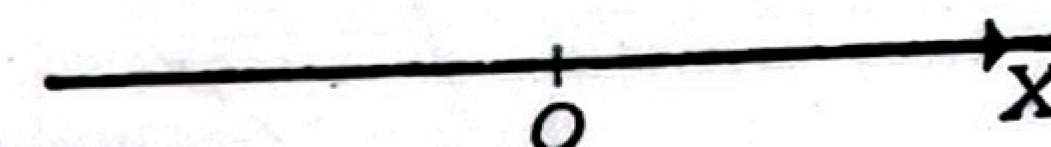


3. $x^2 + 2 \leqq 0$

R: $\{\ \}$

4. $x^2 + 2 > 0$

R: $\{x \mid x \in R\}$ o sea cualquier número real

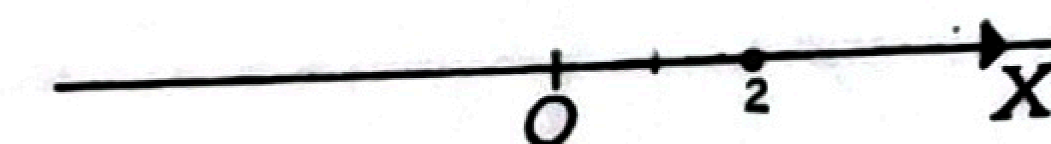


5. $x^2 + 4x + 4 < 0$

R: $\{\ \}$

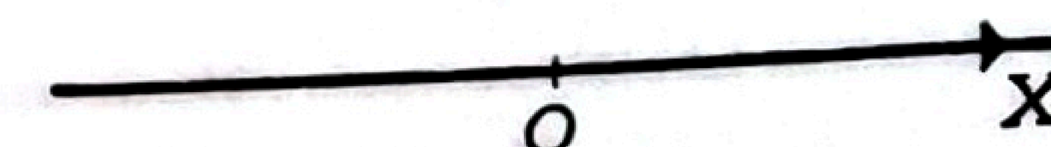
6. $x^2 + 4x + 4 = 0$

R: $\{x \mid x = 2\}$



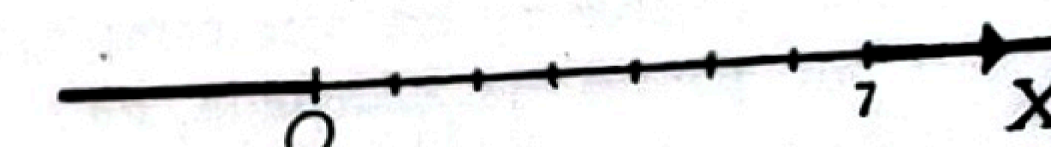
7. $x^2 + 4x + 4 > 0$

R: $\{x \mid x \in R\}$



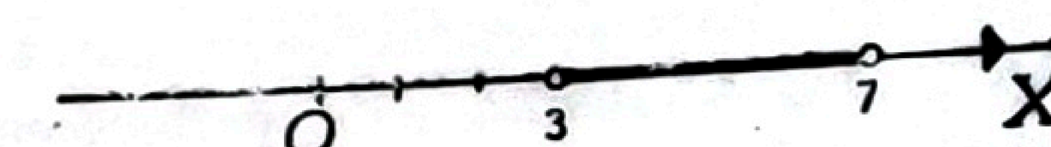
8. $x^2 - 7x \geqq 0$

R: $\{x \mid x \in R \wedge x \leqq 0 \vee x \geqq 7\}$



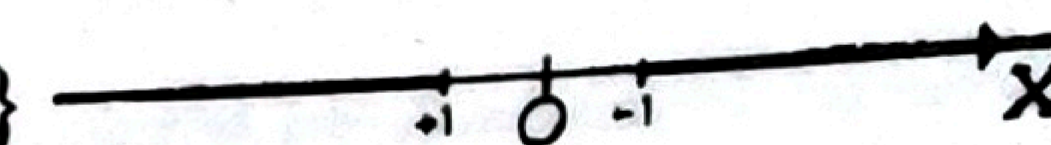
9. $-x^2 + 10x - 21 > 0$

R: $\{x \mid x \in R \wedge 3 < x < 7\}$



10. $-x^2 + 1 \geqq 0$

R: $\{x \mid x \in R \wedge -1 \leqq x \leqq +1\}$



INTERPRETACION GEOMETRICA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS Y DE SUS OPERACIONES

Representación cartesiana de un número complejo. — Se conoce con el nombre de *representación Gauss-Argand* a aquella en la que se representa a todo complejo $z = a + bi$ por el punto $Z(a\,;\,b)$, del plano de un sistema de ejes coordenados cartesianos ortogonales, que tiene por abscisa a la componente real, a, y por ordenada a la componente imaginaria, b, de ese número complejo.

El punto Z que representa gráficamente a un número complejo se denomina *imagen* del mismo y al número *afijo* de ese punto.

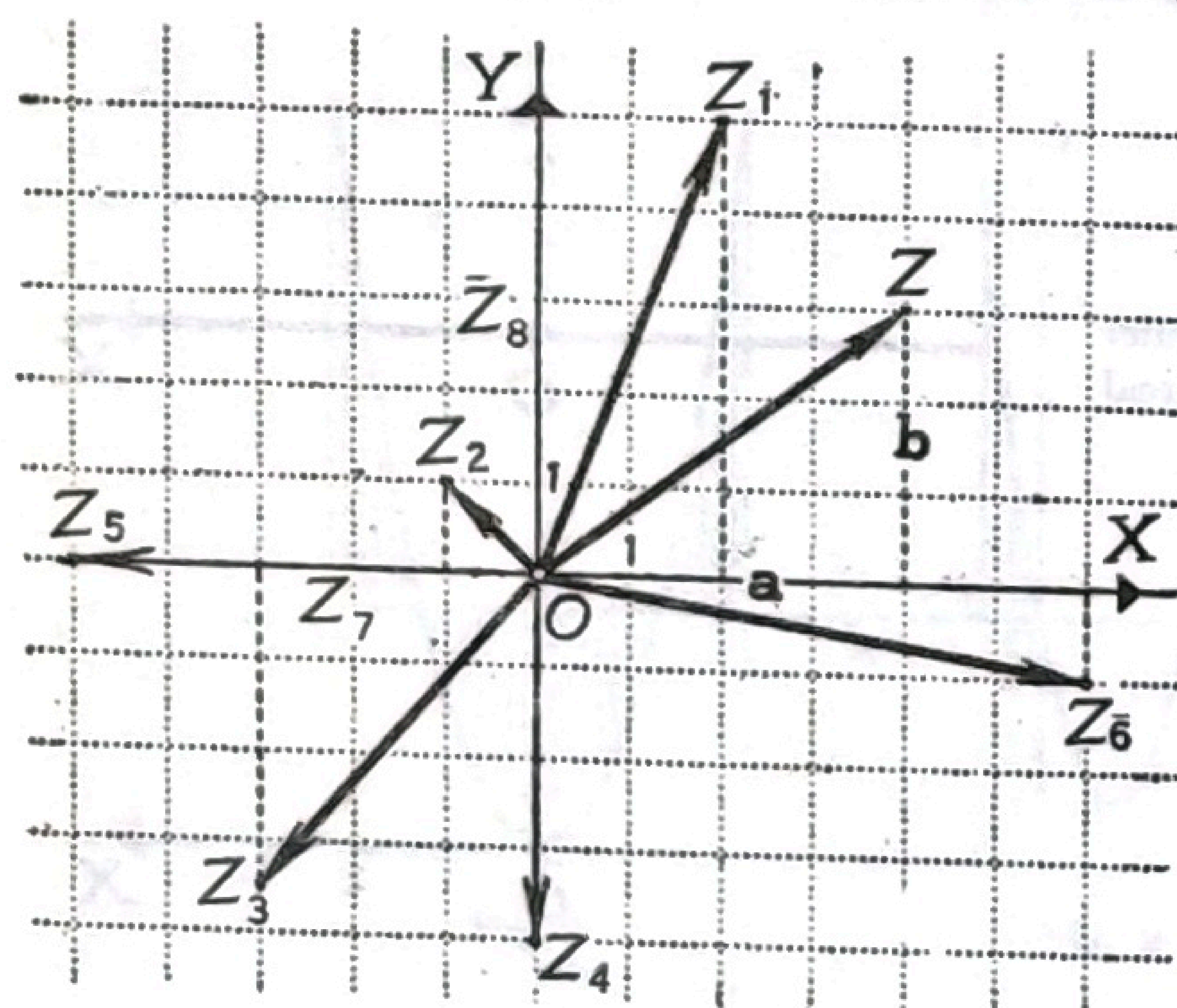


Fig. 1

EJEMPLOS: El afijo

de $Z_1(2\,;\,5)$	es	$2+5i$
„ $Z_2(-1\,;\,1)$	„	$-1+i$
„ $Z_3(-3\,;\,-3{,}5)$	„	$-3-3{,}5i$
„ $Z_4(0\,;\,-4)$	„	$-4i$
„ $Z_5(-5\,;\,0)$	„	-5
„ $Z_6(6\,;\,-1)$	„	$6-i$

Existe una correspondencia biunívoca entre los números complejos y los puntos de un plano, es decir, a cada número complejo le corresponde un punto de un plano y recíprocamente.

Como los números reales son complejos que tienen nula la segunda componente, y los puntos de ordenada nula pertenecen al eje de las abscisas en este eje se encuentra representado todo número real, y recíprocamente, razón por la cual se denomina *eje real* al de las abscisas.

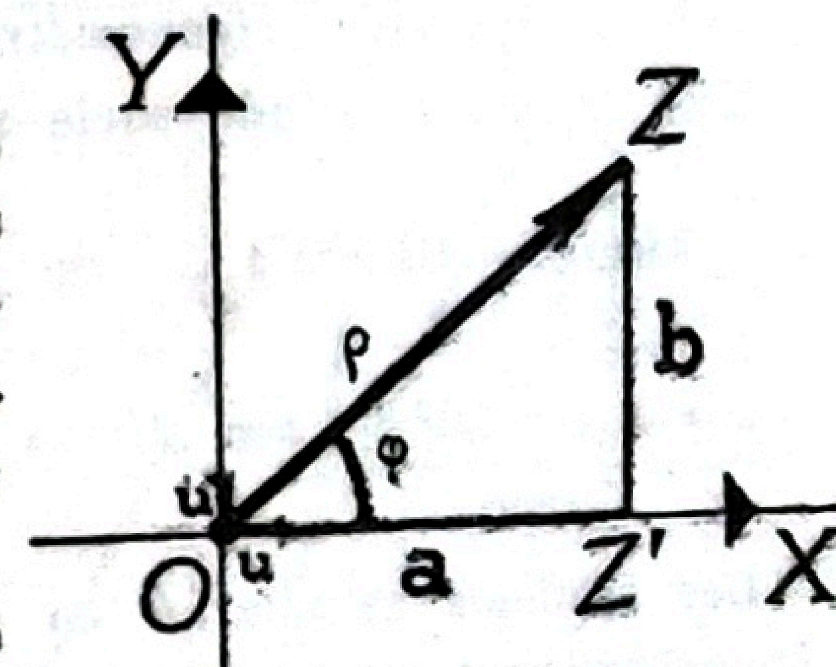
Como los números imaginarios puros tienen nula su primera componente, y los puntos de abscisa nula pertenecen al eje de las ordenadas, en éste se encuentra representado todo número imaginario puro y recíprocamente, razón por la cual se lo denomina *eje imaginario.*

EJEMPLOS: La imagen Z_5 del número real -5 pertenece al eje real OX. La imagen Z_4 del número imaginario puro $-4i$ pertenece al eje imaginario OY.

El complejo que tiene por imagen a Z_7 es real por que ese punto pertenece al eje real OX y es el -2 porque la abscisa de Z_7 es -2.

El complejo que tiene por imagen a Z_8 es imaginario puro porque ese punto pertenece al eje imaginario OY y es el $3i$ porque la ordenada de Z_8 es 3.

Representación polar de un número complejo. — Se conviene, también, en representar a un número complejo $z = a + bi$, por las *coordenadas polares* de su imagen, o sea: por su *módulo* ρ que es el número positivo o nulo, medida de la distancia $\overline{OZ}$ del origen a esa imagen, y su *argumento* φ que es la medida del ángulo XOZ cuyos lados son el semieje OX y la semirrecta OZ determinada por el origen O con la imagen Z del complejo $a + bi$ considerado.



Se llama *módulo* y *argumento* de un complejo al módulo y argumento de su imagen. Como el módulo de un complejo real coincide con su *valor absoluto* se representa al módulo con la misma notación empleada en el campo real para el valor absoluto, es decir, encerrándolo entre barras verticales.

EJEMPLO. — En la figura es

$$Mód.\ z = |z| = med.\ \overline{OZ} = \frac{\overline{OZ}}{u} = \rho$$

$$Arg.\ z = \quad = med.\ \widehat{XOZ} \quad = \varphi$$

Notación $z = \rho_\varphi$ es la representación *módulo argumental* del complejo z.

Pasaje de la representación cartesiana a la módulo argumental. — Si $z = a + bi$ es el complejo dado:

es $\quad Z(a\,;\,b)$ su imagen y $\rho = |z| = \left|\sqrt{a^2+b^2}\right|$ por cor. teor. Pit.

y $\quad \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{b}{\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|}$ y $\cos\varphi = \dfrac{a}{\left|\sqrt{a^2+b^2}\right|}$ y $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a}$

por definición de seno, coseno y tangente, respectivamente, de un ángulo (MATEMÁTICAS, III curso, págs. 370 a 372).

EJEMPLO. — Si $z = (1\,;\,1)$ es $\quad z = \left|\sqrt{1^2+1^2}\right| = \left|\sqrt{2}\right|$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{luego} \quad \varphi = 45^\circ \quad \text{y} \quad z = \left|\sqrt{2}\right|_{45^\circ}$$

Pasaje de la representación módulo argumental a la cartesiana. — Dado el complejo $z = \rho_\varphi$, como un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto o por el coseno del ángulo adyacente a ese cateto, es

$$a = \rho \cos \varphi \quad \text{y} \quad b = \rho \operatorname{sen} \varphi$$

y por lo tanto

$$z = \rho \cos \varphi + i \rho \operatorname{sen} \varphi = \rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

que es la *expresión trigonométrica* del complejo z.

Este último resultado suele abreviarse así: $z = cis\ \varphi$.

Ejemplo. — Si $z = 4_{30^\circ}$ es

$$z = 4 (\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \quad \text{o sea} \quad z = 2\sqrt{3} + 2i$$

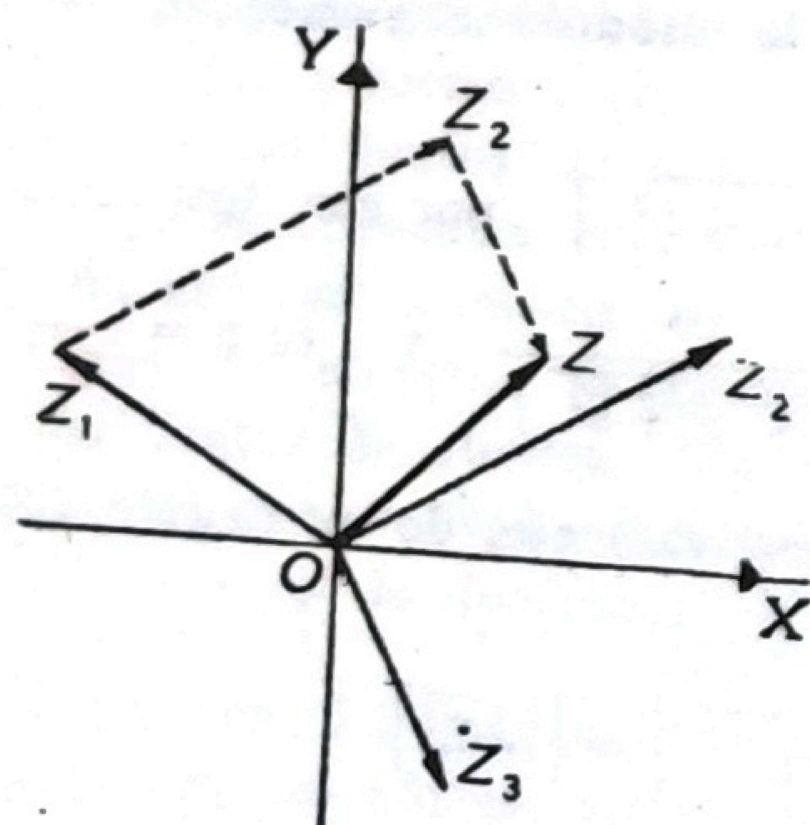
Los alumnos estudiarán en el curso de Trigonometría que las funciones trigonométricas de un ángulo tienen también sentido cuando ese ángulo no es agudo y que son válidos para ellos los resultados obtenidos.

El módulo de un número real es, como se dijo, su valor absoluto y su argumento es 0° ó 180° según que el número sea positivo o negativo, respectivamente. El módulo de un número imaginario puro es el valor absoluto de su segunda componente y su argumento 90° ó 270° según que esa componente sea positiva o negativa, respectivamente.

Ejemplo. — De la figura 1 resulta que siendo Z_5, Z_4 y Z_8 las imágenes de los números — 5 ; — $4i$ y $3i$, respectivamente, es:

$$-5 = 5_{180^\circ} \ ; \quad -4i = 4_{270^\circ} \quad \text{y} \quad 3i = 3_{90^\circ} .$$

Suma. — La suma de dos o más números complejos z_1, z_2 z_3 se obtiene geométricamente procediendo así:



1º) Se representan geométricamente los complejos sumandos obteniéndose los segmentos dirigidos OZ_1, OZ_2 y OZ_3.

2º) Se construye la poligonal $OZ_1 Z'_2 Z$ que tiene por origen al de los ejes y cuyos lados son paralelos, iguales y del mismo sentido que OZ_1, OZ_2 y OZ_3. El extremo Z de esta poligonal representa a la suma de los complejos $z_1 + z_2 + z_3$.

Para el caso de dos complejos la mencionada poligonal se reduce a un triángulo (Fig. 1).

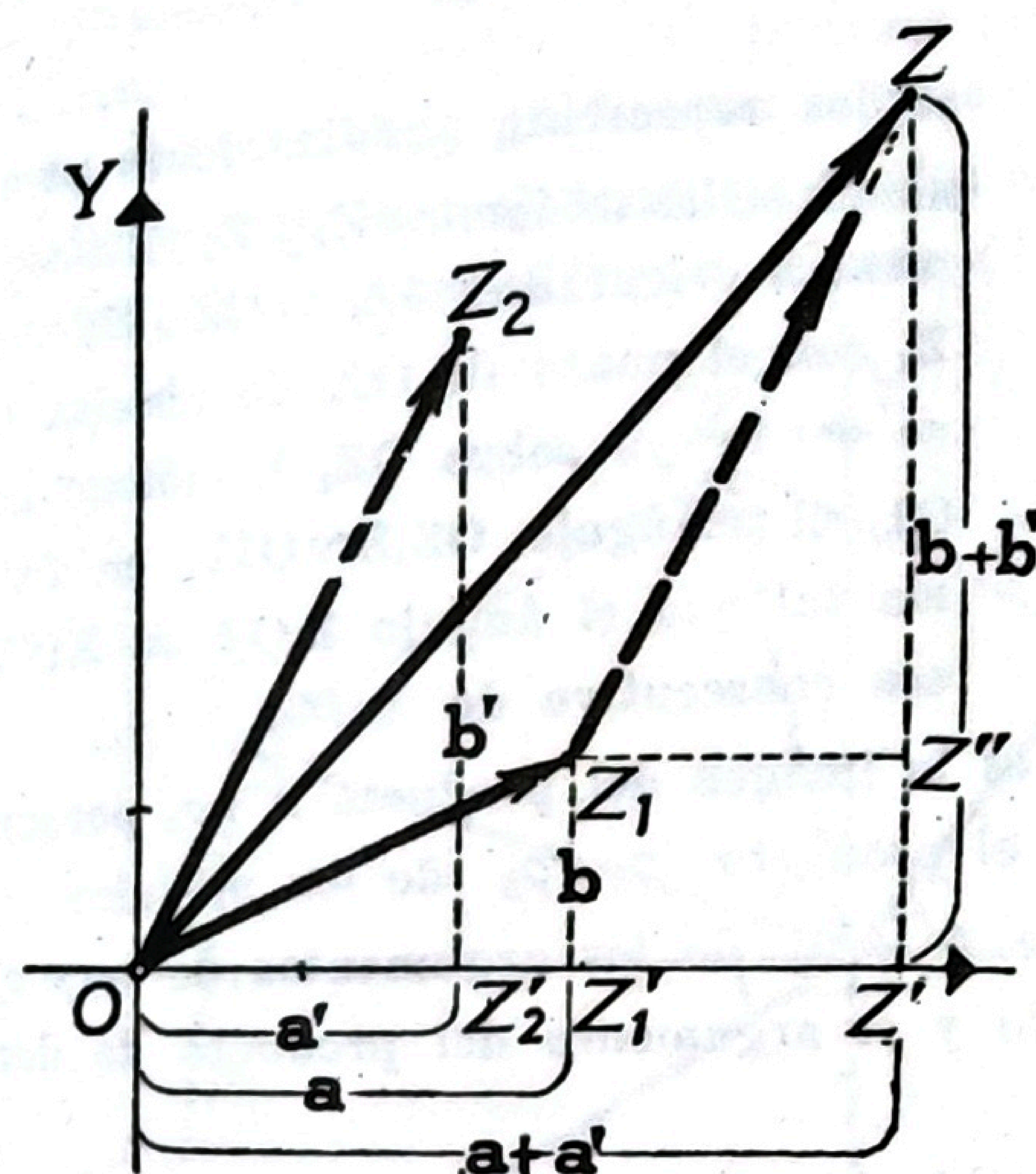


Fig. 1

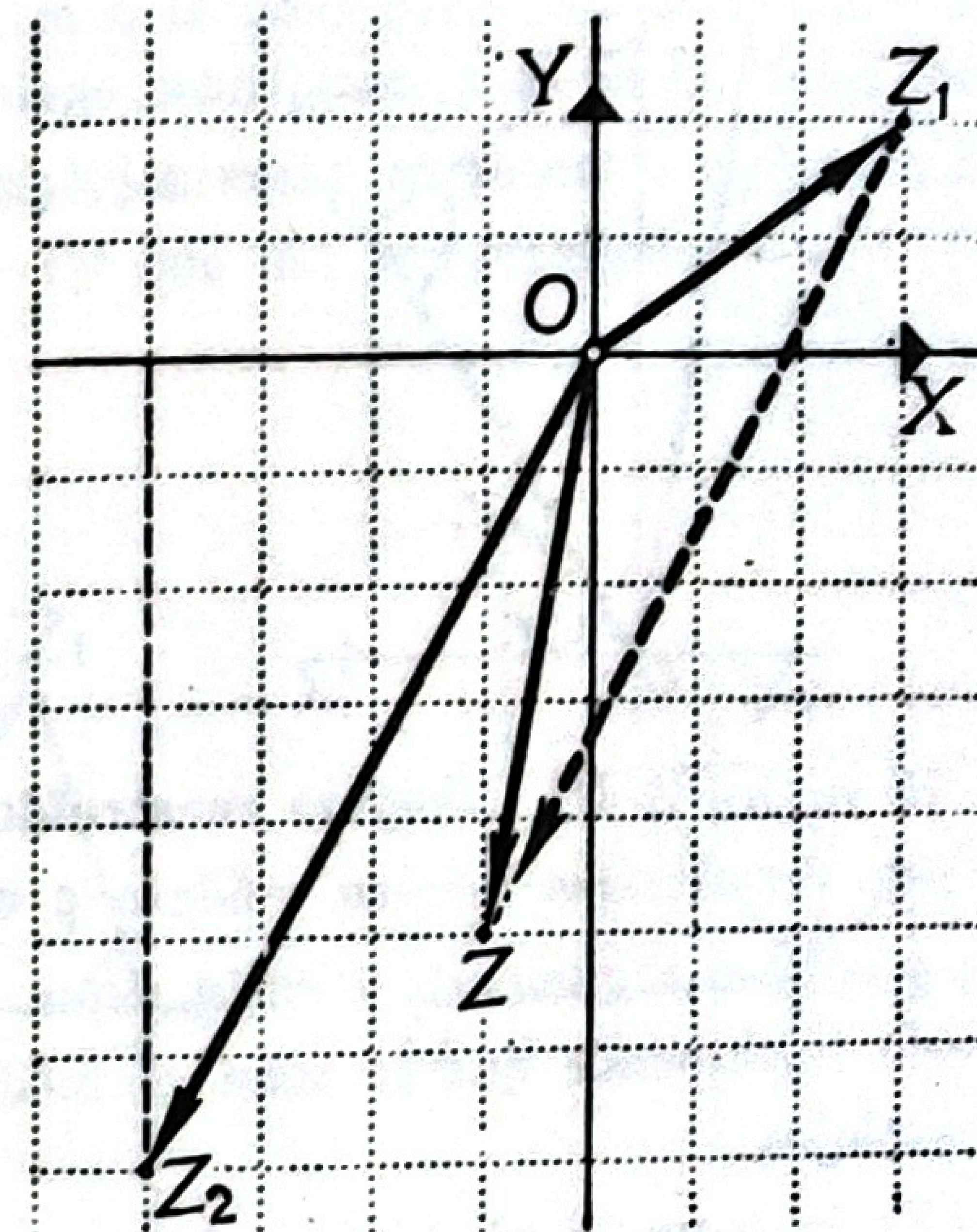
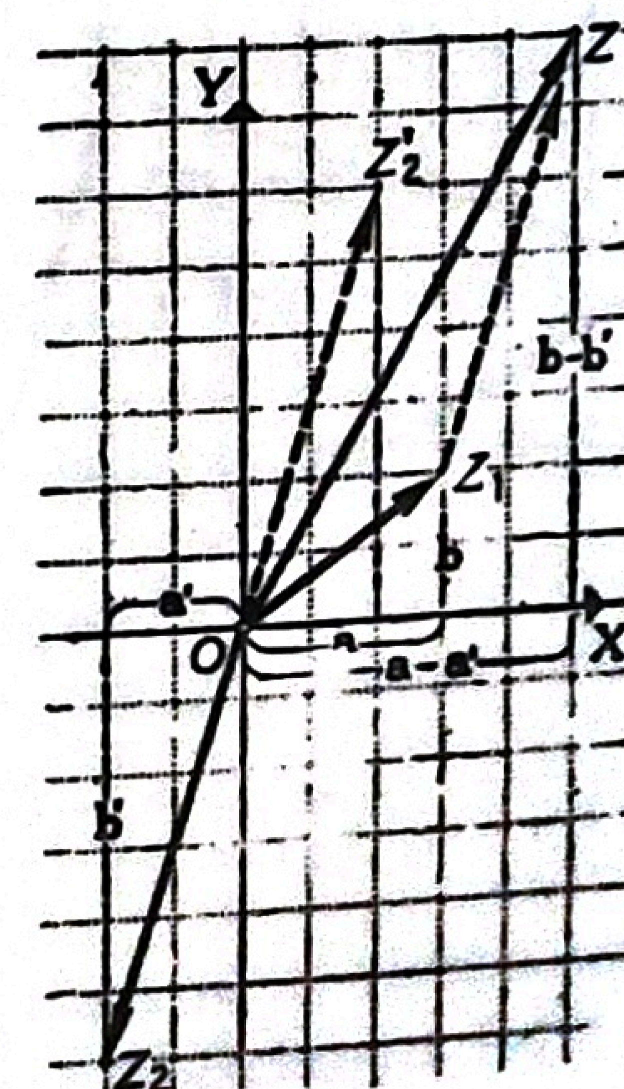


Fig. 2

En la Fig. 2 se indica cómo se ha obtenido geométricamente la suma

$$3 + 2i + (-4 - 7i) = -1 - 5i.$$

Resta. — La diferencia entre un complejo z_1 y otro z_2 se obtiene sumando al minuendo el contrario — z_2 del sustraendo, es decir, trazando por la imagen del minuendo el segmento paralelo, igual y de sentido contrario al del sustraendo, como se indica en la figura adjunta donde se ha obtenido la diferencia entre



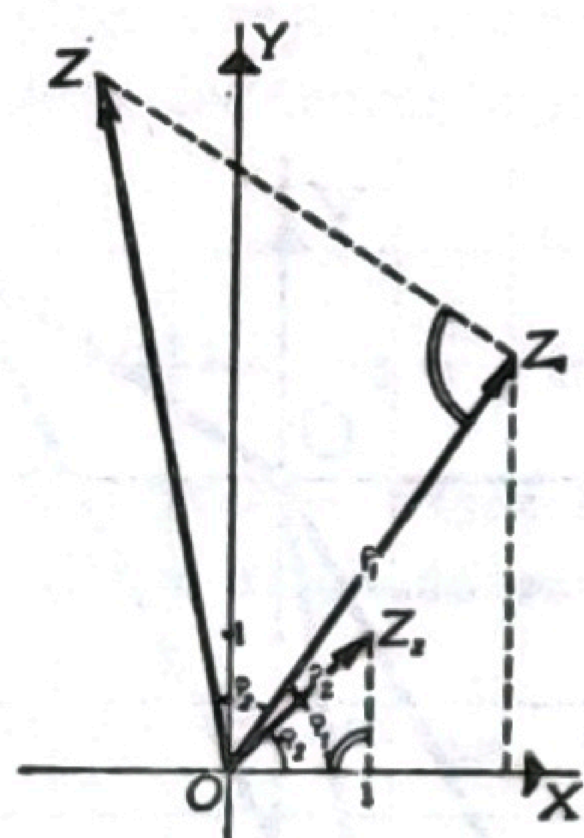
$$z_1 = 3 + 2i \quad \text{y} \quad z_2 = -2 - 6i$$

y dió

$$z_1 - z_2 = 5 + 8i$$

Observacion. La medida del se6mento $\overline{z_2 z_1} = |z_2 - z_1|$

Multiplicación. — Para hallar el producto de dos números complejos



$$z = a + bi \quad y \quad z = c + di$$

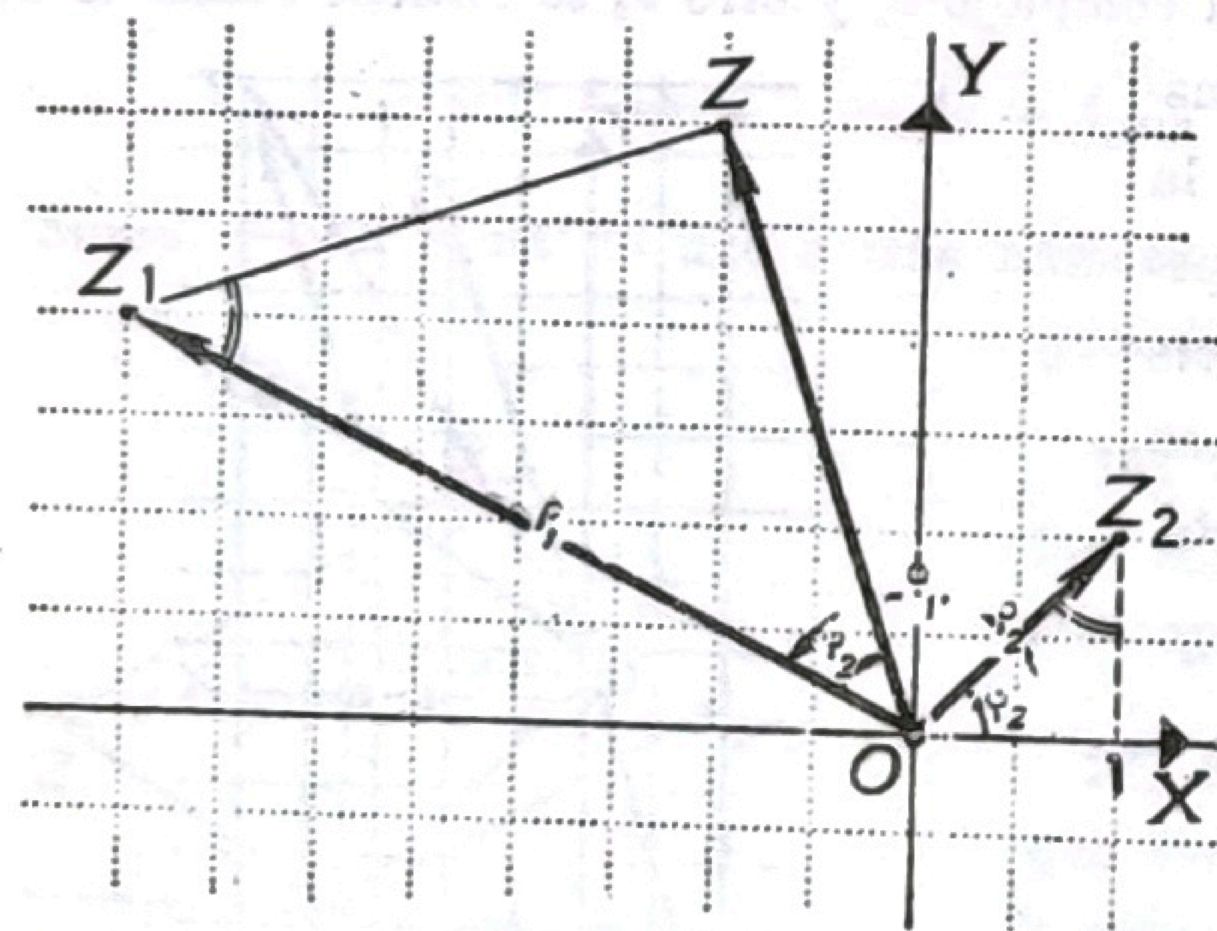
se los representa gráficamente obteniéndose las imágenes Z_1 y Z_2 y los segmentos orientados OZ_1 y OZ_2. Se une Z_2 con el punto de OX de abscisa 1, se construye sobre OZ_1 homólogo de O1, el triángulo $OZ_1Z \sim O1Z_2$ en forma tal que el ángulo $Z_1OZ = XOZ_1$ sea consecutivo de XOZ_1.

El vértice Z del triángulo construído es la imagen del producto $z_1 \cdot z_2$ porque puede demostrarse que su módulo ρ es el producto $\rho_1 \cdot \rho_2$ de los módulos de z_1 y z_2 y su argumento φ es la suma de $\varphi_1 + \varphi_2$ de los argumentos de z_1 y z_2 como corresponde que lo sean el módulo y el argumento del producto de dos complejos.

En la figura 6 *a*) de pág. 247 se ha obtenido el producto

$$(1+i) \cdot (1{,}5+3{,}5\,i) = -2+5\,i.$$

División. — Para hallar gráficamente el cociente entre un número complejo $z_1 = a + bi$ y otro $z_2 = c + di$ se los representa gráficamente obteniéndose los puntos Z_1 y Z_2 y los segmentos orientados OZ_1 y OZ_2. Se une Z_2 con el punto



del eje OX de abscisa 1, y se construye sobre OZ_1 el

$$\overset{\triangle}{OZ_1Z} \sim \overset{\triangle}{OZ_21}$$

en forma tal que OZ_1 resulte homólogo de OZ_2 y OZ homólogo con O1. El vértice Z del triángulo construído es la imagen del cociente $z_1 : z_2$ porque puede demostrarse que tiene por módulo ρ al cociente $\rho_1 : \rho_2$ del módulo del dividendo por el del divisor y por argumento φ a la diferencia $\varphi_1 - \varphi_2$ entre el argumento del dividendo y el del divisor como deben ser el módulo y el argumento del cociente entre un complejo y otro.

En la figura se ha obtenido gráficamente el cociente

$$(-4+2\,i) : (1+i) = -1+3\,i.$$

Potencias de exponente natural. — Se obtienen, de acuerdo con la definición, multiplicando tantos factores iguales a la base como indica el exponente, esto es efectuando gráficamente las sucesivas multiplicaciones en la forma indicada para obtener el producto de dos complejos como se ve en la figura 1 para $z^4 = z.z.z.z$ y en la figura 2 para $(1+i)^4$ que dió por resultado -4.

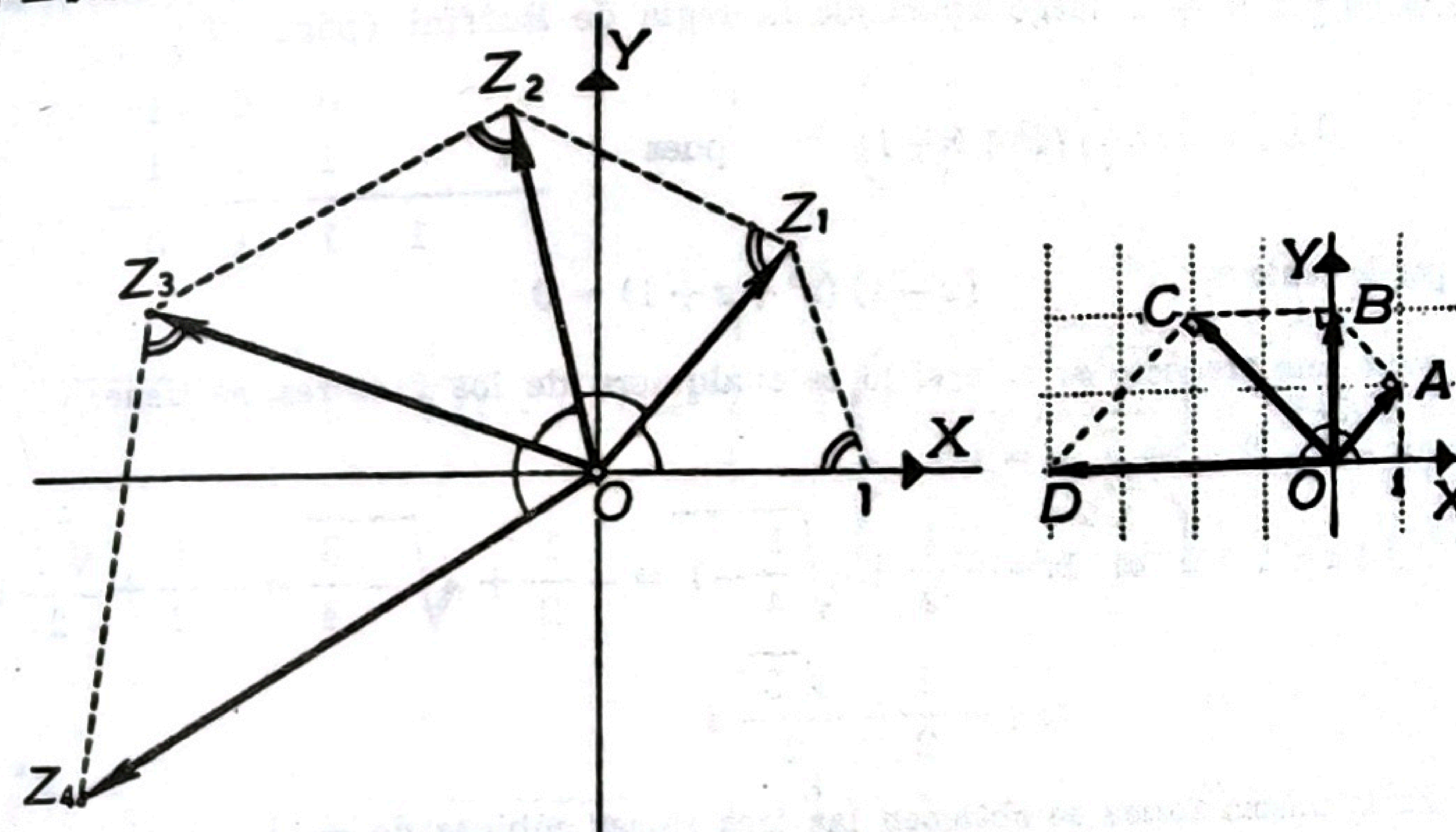


Fig. 1

Fig. 2

Raíces emésimas. — Se llama ***raíz emésima de un número complejo***, siendo *m* un número natural mayor que 1, a todo número complejo que elevado a la potencia emésima sea igual al número dado.

En símbolos: $\sqrt[m]{a+bi} = x+yi$ si $(x+yi)^m = a+bi.$

Puede demostrarse empleando recursos de Algebra y Trigonometría que todavía no poseen los alumnos, que:

Todo número complejo tiene m raíces emésimas, es decir, dos raíces cuadradas, tres cúbicas, cuatro cuartas...

A continuación se tratan algunos ejemplos de raíces cúbicas y cuartas de números complejos reales, que pueden calcularse con los recursos matemáticos de que disponen los alumnos.

Problema I) *Hallar las raíces cuartas de* 81.

Como $\sqrt[4]{81} = \sqrt{\sqrt{81}}$; $\sqrt{81} = \pm 9$; $\sqrt{9} = \pm 3$ y $\sqrt{-9} = \pm 3i$

resulta $\sqrt[4]{81} = 3$; $\sqrt[4]{81} = -3$; $\sqrt[4]{81} = 3i$ y $\sqrt[4]{81} = -3i$

PROBLEMA II) *Hallar las raíces cúbicas de* 1.

Llamando x a los valores reales o complejos imaginarios buscados tendríamos que cada uno de ellos elevados al cubo deben dar 1 o sea

$$x^3=1 \quad \therefore \quad x^3-1=0 \quad \text{o bien} \quad x^3-1^3=0 \quad \text{pues} \quad 1=1^3$$

y como la diferencia de dos potencias de igual grado impar es divisible por la diferencia de sus bases (MATEMÁTICAS, III, pág. 90), resulta $x^3-1=x^3-1^3$ divisible por $x-1$, luego aplicando la regla de Ruffini (pág. 87)

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1) \quad \text{pues} \quad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

y por lo tanto

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

y como este producto es nulo si lo es cualquiera de los factores, se tiene:

si $x-1=0$ es $x_1=1$

si $x^2+x+1=0$ es $x_2=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-1}=-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

y

$$x_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

En la misma forma se obtienen las tres raíces cúbicas de -1.

$$\sqrt[3]{-1}=-1\ ; \quad \sqrt[3]{-1}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{-1}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

PROBLEMA III) *Hallar las raíces cuartas de* 1.

Como $\sqrt[4]{1}=\sqrt{\sqrt{1}}$; $\sqrt{1}=\pm 1$; $\sqrt{+1}=\pm 1$ y $\sqrt{-1}=\pm i$

es $\sqrt[4]{1}=1$; $\sqrt[4]{1}=-1$; $\sqrt[4]{1}=i$ y $\sqrt[4]{1}=-i$

Raíces emésimas de números reales. — Se demuestra en cursos superiores que: *Las raíces emésimas de un número real son iguales a los productos del valor aritmético de la raíz emésima de su valor absoluto, por cada una de las raíces emésimas de + 1 o de − 1 según que dicho número sea positivo o negativo, respectivamente.*

Si con $\sqrt[m]{((a))}$ indicamos sus m raíces emésimas y con $\sqrt[m]{a}$ a su valor aritmético, se tiene

$$\sqrt[m]{((a))}=\sqrt[m]{a}\ \sqrt[m]{((\pm 1))}$$

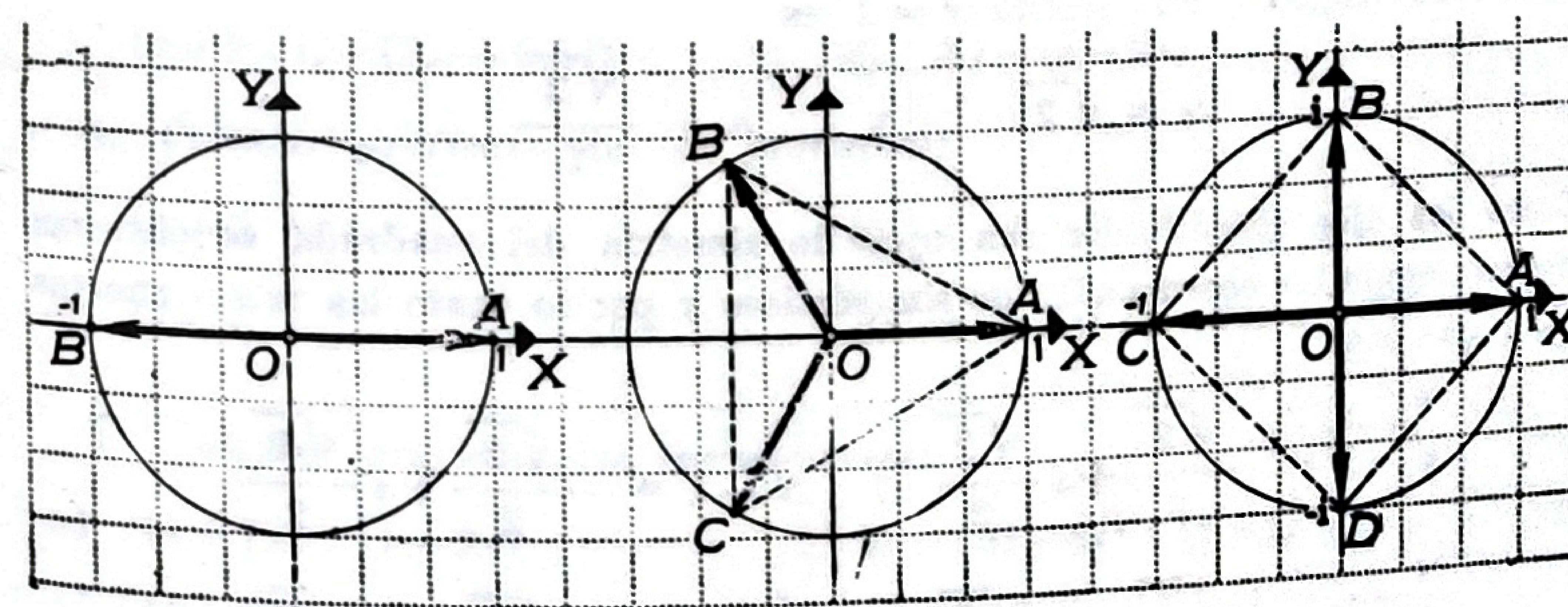
Para poder aplicar este teorema es conveniente tener en cuenta los valores de las distintas raíces de $+1$ y de -1 halladas anteriormente, como se ve en los ejemplos que siguen:

$$\sqrt[3]{((+8))}=\sqrt[3]{8}\ \sqrt[3]{((+1))}=\begin{cases} 2\cdot 1 = 2 \\ 2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+i\sqrt{3} \\ 2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1-i\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{((-64))}=\sqrt[3]{64}\ \sqrt[3]{((-1))}=\begin{cases} 4\cdot -1 = -4 \\ 4\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2+i\,2\sqrt{3} \\ 4\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2-i\,2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{((+81))}=\sqrt[4]{81}\ \sqrt[4]{((+1))}=\begin{cases} 3\cdot 1 = 3 \\ 3\cdot -1 = -3 \\ 3\cdot i = 3i \\ 3\cdot -i = -3i \end{cases}$$

Representación gráfica de las raíces de + 1 y de − 1. — Las imágenes de las m raíces emésimas del número $+1$ son los vértices del polígono regular



de m lados inscripto en la circunferencia de centro en el origen de los ejes

y de radio igual al segmento unidad OA. Uno de los vértices del mencionado polígono es el punto A(1 ; 0) que es la imagen del valor aritmético de la raíz emésima de 1.

Las tres figuras anteriores justifican la representación gráfica indicada, puesto que las coordenadas de los vértices de cada uno de los polígonos (que en el primer caso se reduce a un segmento) tienen los valores de las componentes de las raíces calculadas algebraicamente.

Las imágenes de las raíces emésimas de -1 se obtienen de manera análoga a la indicada para las de $+1$ cuidando que uno de los vértices del polígono regular sea el extremo, A, del arco IA cuyo valor es el cociente de $180° : m$.

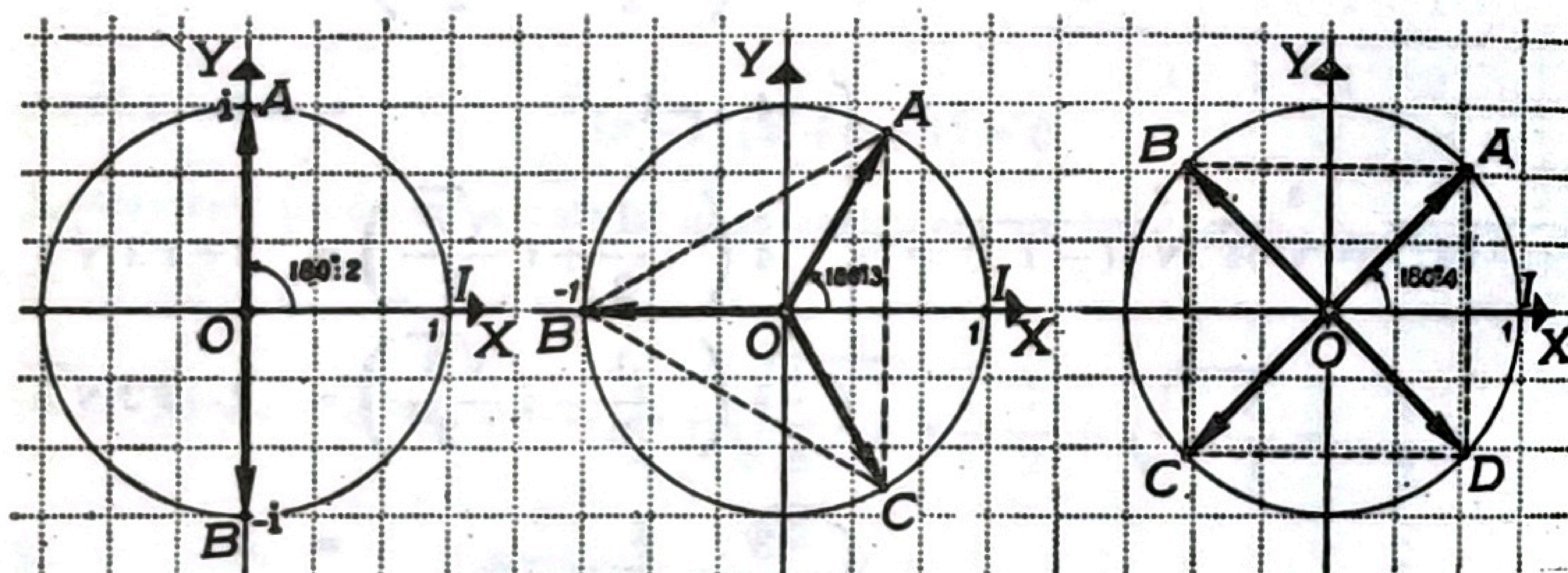


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

La interpretación geométrica indicada se utiliza, también, para calcular gráficamente las raíces emésimas de $+1$ y de -1. Así, por ejemplo, teniendo en cuenta (MATEMÁTICAS III, pág. 339), que los valores del lado y de la apotema del cuadrado inscripto en la circunferencia de radio r son

$$l_4 = r\sqrt{2} \quad \text{y} \quad a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

resulta de la figura 3 que siendo $r = 1$ es

$$l_4 = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad a_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como los ejes coordenados son ejes de simetría del cuadrado se obtienen inmediatamente las coordenadas de sus vértices y por lo tanto las raíces cuartas de -1 que son:

$$\sqrt[4]{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \quad \sqrt[4]{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt[4]{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \quad \sqrt[4]{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aplicaciones. — **1.** *Determinar las imágenes de los complejos siguientes empleando la representación gráfica o la polar según convenga:*

a) $(3 ; 4)$; *b*) $6-3i$; *c*) $-4+2i$; *d*) $3+3i$

e) $4_{30°}$; *f*) $2_{225°}$; *g*) $-3i$; *h*) $5i$

i) $-4-4i$; *j*) $3_{90°}$; *k*) $4_{180°}$

2. *Calcular el módulo y el argumento principal de los complejos:*

a) $1+i$; *b*) $-1+i$; *c*) $-1-i$; *d*) $2-i2\sqrt{3}$

e) $3i$; *f*) -5 ; *g*) $-2i$

y representarlos en forma módulo argumental y trigonométrica.

3. *Escribir en forma cartesiana, binómica, módulo argumental y trigonométrica los complejos conjugados y contrarios de los complejos dados en el ejercicio anterior.*

4. *Calcular gráficamente las sumas:*

a) $(1+3i)+(2+i)$; *b*) $(3+2i)+(-4+i)$

c) $(4-2i)+(-2-i)$; *d*) $(-3+6i)+5$

e) $3i+(-3+2i)$; *f*) $(-5+4i)+(-5-4i)$

g) $(9+2i)+(-6+4i)+(2-2i)$; *h*) $(2-5i)+(-5+5i)+(5+2i)+4i$

5. *Calcular gráficamente las diferencias:*

a) $(10+3i)-(4+5i)$; *b*) $(1+0{,}5i)-(3-1{,}5i)$

c) $(3{,}5+2i)-(3{,}5-0{,}5i)$; *d*) $3i-(3-2i)$

6. *Calcular gráficamente los productos:*

a) $(1+i)\,(2+3i)$; *b*) $(-1+i)\,(2-3i)$

c) $(1+i)\,2$; *d*) $(1+2i)\,(1-2i)$; *e*) $(1+i)\,i$

7. *Calcular gráficamente los cocientes:*

a) $(1+7i) : (1+2i)$; *b*) $(10-4i) : (1-i)$

c) $(4+2i) : i$; *d*) $(-5+2i) : -i$

e) $(2+2i) : (1+i)$; *f*) $(2-2i) : (1-i)$

8. ***Calcular gráficamente las potencias:***

a) i^2 ; *b)* $i^2; i^3; i^4; i^5; i^6; i^7; i^8$; *c)* $(1-i)^2$

d) $(1+i)^2$) *e)* $(1-i)^3$; *f)* $(1+i)^3$

g) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$; *h)* $(1+i)^5$

9. ***Calcular gráficamente las raíces:***

a) sextas de $+1$; *b)* sextas de -1 ; *c)* cuartas de $+1$

d) octavas de $+1$

10. ***Calcular algebraicamente las raíces:***

a) $\sqrt[3]{((27))}$; *b)* $\sqrt[3]{((-27))}$; *c)* $\sqrt[3]{\left(\left(\frac{1}{8}\right)\right)}$

d) $\sqrt[3]{\left(\left(-\frac{1}{8}\right)\right)}$; *e)* $\sqrt[3]{\left(\left(-\frac{8}{27}\right)\right)}$; *f)* $\sqrt[4]{((625))}$

g) $\sqrt[4]{((-16))}$; *h)* $\sqrt[4]{((0{,}0001))}$; *i)* $\sqrt[4]{((0{,}0016))}$

j) $\sqrt[4]{((-10\,000))}$; *k)* $\sqrt[4]{\left(\left(-\frac{1}{81}\right)\right)}$;

Soluciones.

2. *a)* $\rho = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{1} = 1 \quad \therefore \quad \varphi = 45°$;

$z_a = \sqrt{2}_{45°} = \sqrt{2}\,(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$

b) $\rho = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$; $|\operatorname{tg}\varphi| = \left|\frac{-1}{1}\right| = 1$

y como $(-1;\ 1)$ está en el 2º cuad. es $\varphi = 135°$

luego $z_b = \sqrt{2}_{135°} = \sqrt{2}$ cis $135°$

c) $\rho = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{-1} = 1$

y como $(-1;\ -1)$ está en el 3er cuad. es $\varphi = 225°$

luego $z_c = \sqrt{2}_{225°} = \sqrt{2}$ cis $225°$

d) $\rho = \sqrt{2^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$;

$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{-2\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{3} \quad \therefore \quad \varphi = 300°$; $z_d = 4_{300°} = 4$ cis $300°$

e) $\rho = 3$ y $\varphi = 90°$; $z_e = 3_{90°} = 3$ cis $90°$

f) $\rho = |-5| = 5$ y $\varphi = 0°$; $z_f = 5_{0°} = 5$ cis $0°$

g) $\rho = |-2| = 2$ y $\varphi = 270°$; $z_g = 2_{270°} = 2$ cis $270°$

3. *a)* $\bar{z}_a = (\ 1;\ -1) = \ 1 - i = \sqrt{2}_{-45°}$

$\bar{z}_a = \sqrt{2}\,[\cos(-45°) + i \operatorname{sen}(-45°)]$

$-z_a = (-1;\ -1) = -1 - i = \sqrt{2}_{225°} = \sqrt{2}$ cis $225°$

b) $\bar{z}_b = (-1;\ -1) = -1 - i = \sqrt{2}_{-135°} = \sqrt{2}$ cis $(-135°)$

$-z_b = (\ 1;\ -1) = \ 1 - i = \sqrt{2}_{315°} = \sqrt{2}$ cis $315°$

c) $\bar{z}_c = (-1;\ \ 1) = -1 + i = \sqrt{2}_{135°} = \sqrt{2}$ cis $135°$

$-z_c = (\ 1;\ \ 1) = \ 1 + i = \sqrt{2}_{45°} = \sqrt{2}$ cis $45°$

d) $\bar{z}_d = \left(2;\ 2\sqrt{3}\right) = 2 + i\,2\sqrt{3} = 4_{60°} = 4$ cis $60°$

$-z_d = \left(-2;\ 2\sqrt{3}\right) = -2 + i\,2\sqrt{3} = 4_{120°} = 4$ cis $120°$

e) $\bar{z}_e = (\ 0;\ -3) = -\ 3\,i = 3_{270°} = 3$ cis $270°$

$-z_e = (\ 0;\ -3) = -\ 3\,i = 3_{270°} = 3$ cis $270°$

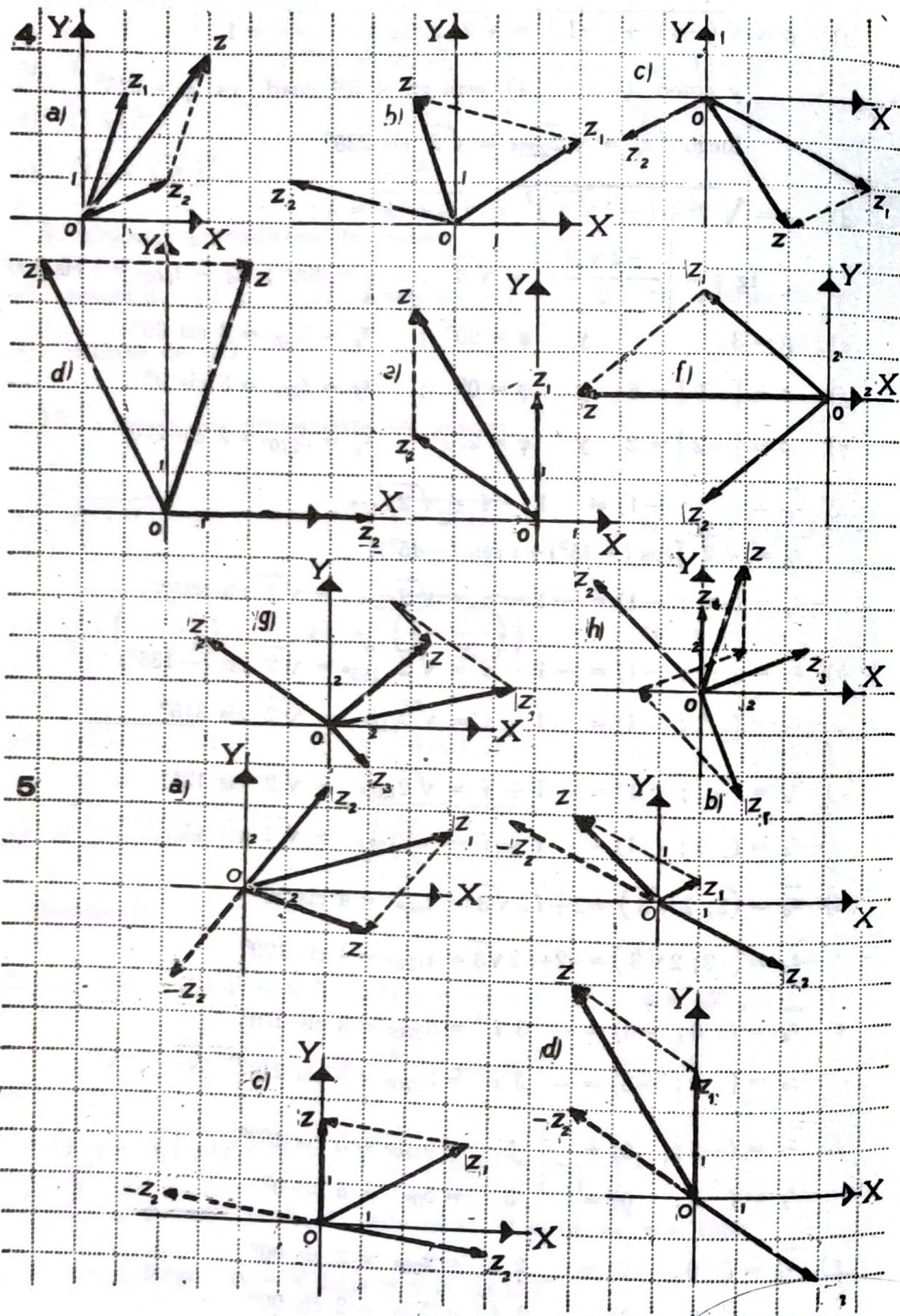
f) $\bar{z}_f = (-5;\ \ 0) = -\ 5 = 5_{180°} = 5$ cis $180°$

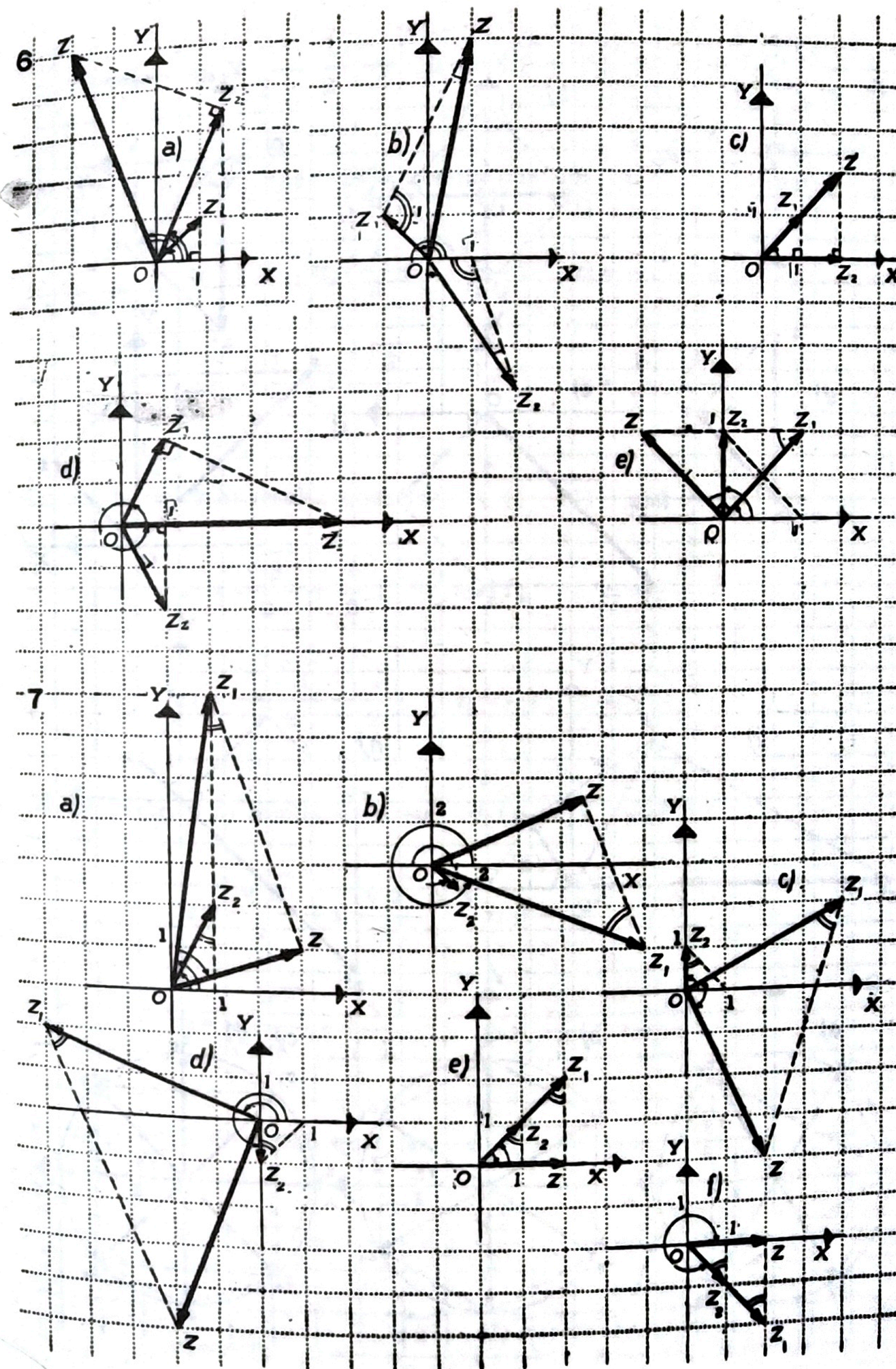
$-z_f = (\ 5;\ \ 0) = \ 5 = 5_{0°} = 5$ cis $0°$

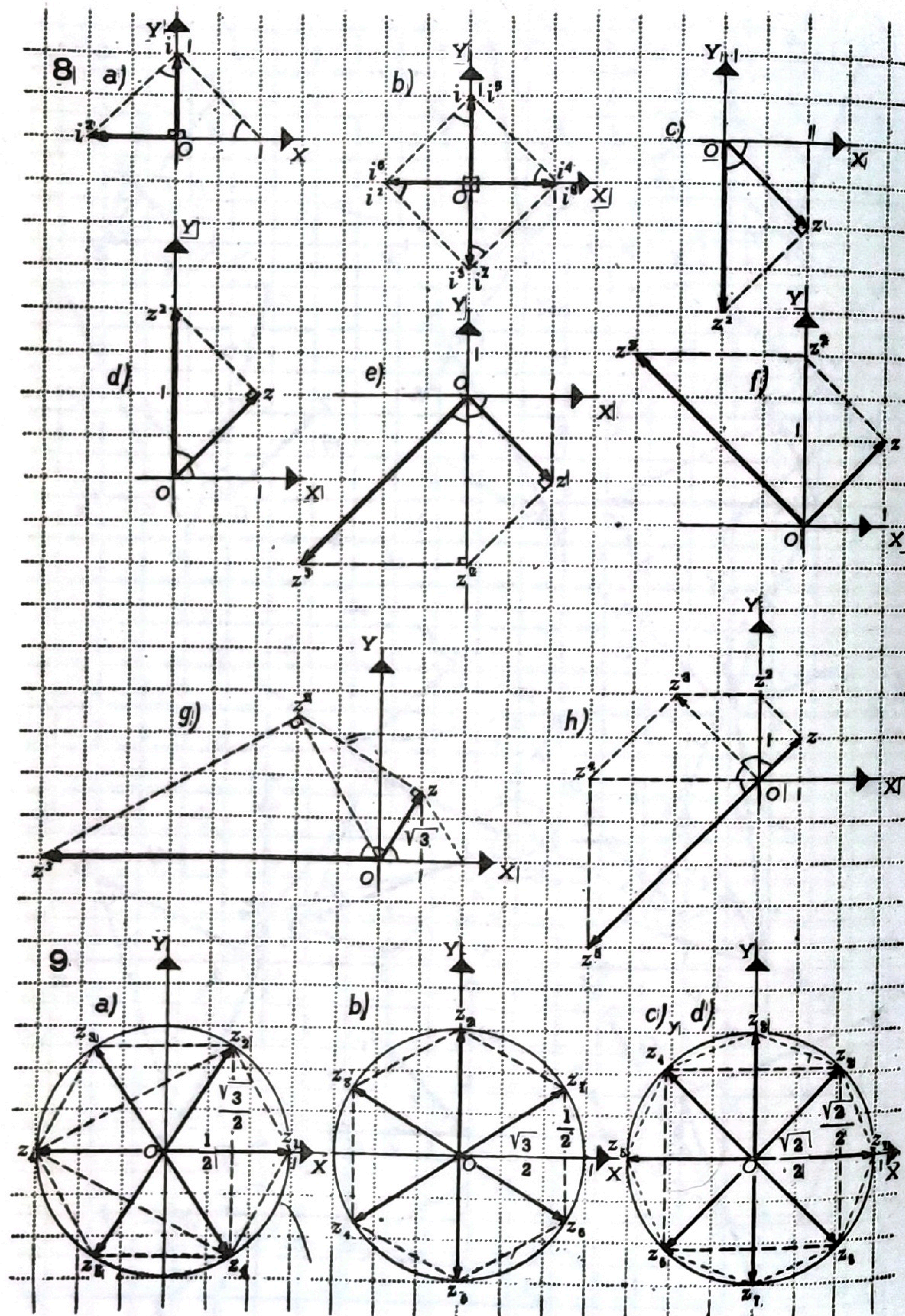
g) $\bar{z}_g = (\ 0;\ \ 2) = \ 2\,i = 2_{90°} = 2$ cis $90°$

$-z_g = (\ 0;\ \ 2) = \ 2\,i = 2_{90°} = 2$ cis $90°$

4







Siendo $a_3 = \dfrac{r}{2} = \dfrac{1}{2}$ y $l_3 = r\sqrt{3} = \sqrt{3}$

9. De la fig. 9 *a*), (pág. 248), resulta que: las $\sqrt[6]{((1))}$ son:

$$z_1 = 1\,; \quad z_2 = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,; \quad z_3 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,; \quad z_4 = -1$$

$$z_5 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad z_6 = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

De la fig. 9 *b*) resulta que: las $\sqrt[6]{((-1))}$ son:

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\,; \quad z_2 = i\,; \quad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\,; \quad z_5 = -i\,; \quad z_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

De la fig. 9 *c*) resulta que: las $\sqrt[4]{((-1))}$ son:

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,; \quad z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,; \quad z_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

y de la fig. 9 *d*) resulta que: las $\sqrt[8]{((1))}$ son:

$$z_1 = 1\,; \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,; \quad z_3 = i\,; \quad z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_5 = -1\,; \quad z_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,; \quad z_7 = -i\,; \quad z_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejercicios. — *Representar gráficamente los conjuntos siguientes:*

a) $\{z \mid z \in C \wedge |z| = 2\}$; b) $\{z \mid z \in C \wedge |z| \leq 2\}$;

c) $\{z \mid z \in C \wedge |z| \geq 2\}$; d) $\{z \mid z \in C \wedge |z| < 2\}$;

e) $\{z \mid z = x + yi \wedge x \geq 2\}$; f) $\{z \mid z = x + yi \wedge y = -2\}$;

g) $\{z \mid z \in C \wedge \operatorname{Arg} z = 30^\circ\}$; h) $\{z \mid z \in C \wedge 0 \leq \operatorname{Arg} z \leq 45^\circ\}$;

i) $\{z \mid z \in C \wedge \frac{1}{2}\pi < \operatorname{Arg} z < \pi\}$; j) $\{z \mid z \in C \wedge |z + 2| = 1\}$;

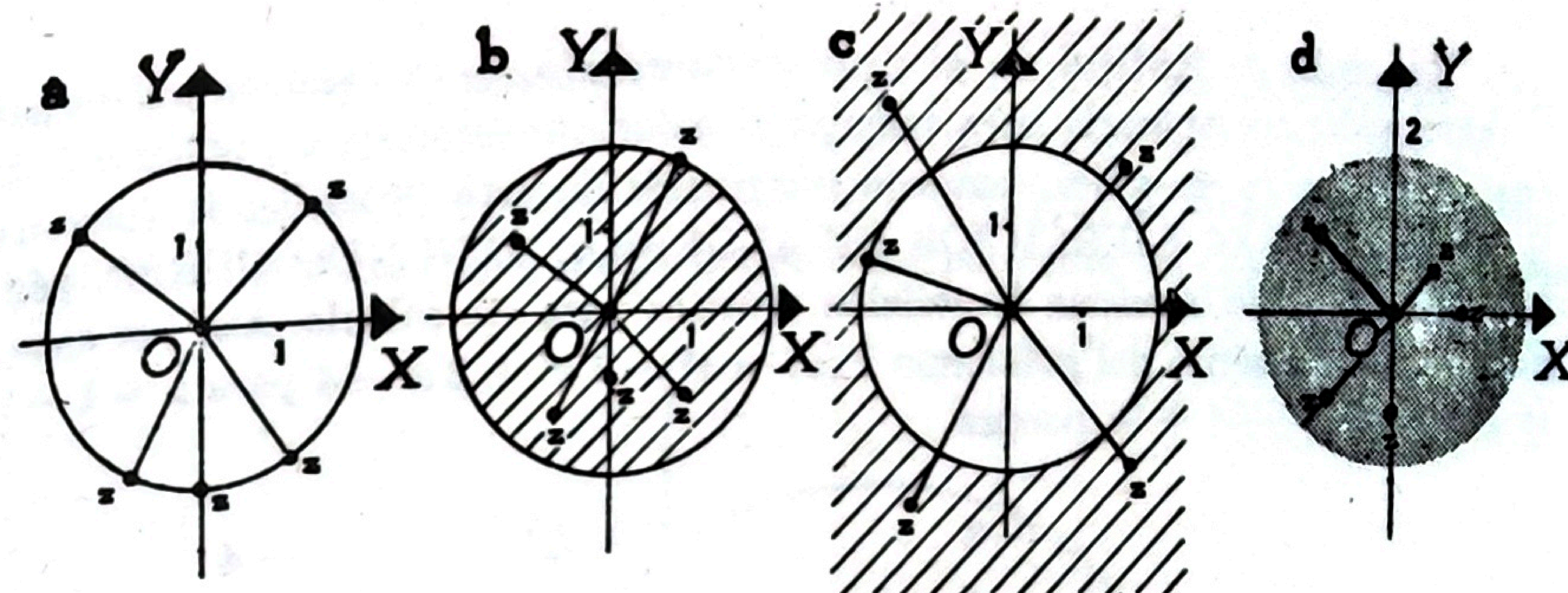
k) $\{z \mid z \in C \wedge |z - i| = 1\}$; l) $\{z \mid z \in C \wedge |z + i| = 1\}$;

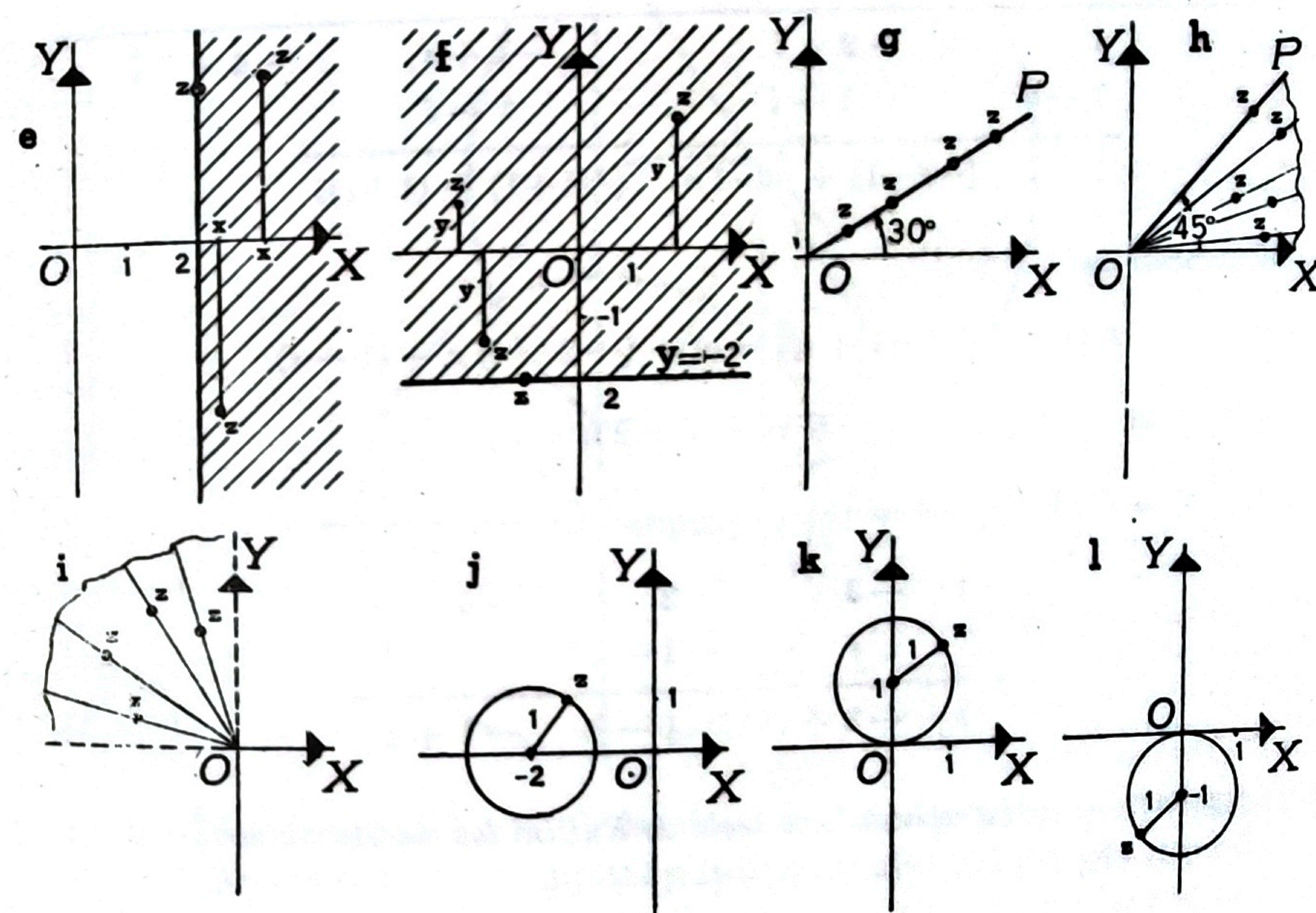
m) $\{z \mid z \in C \wedge 3 \leq |z - 4i| < 5\}$;

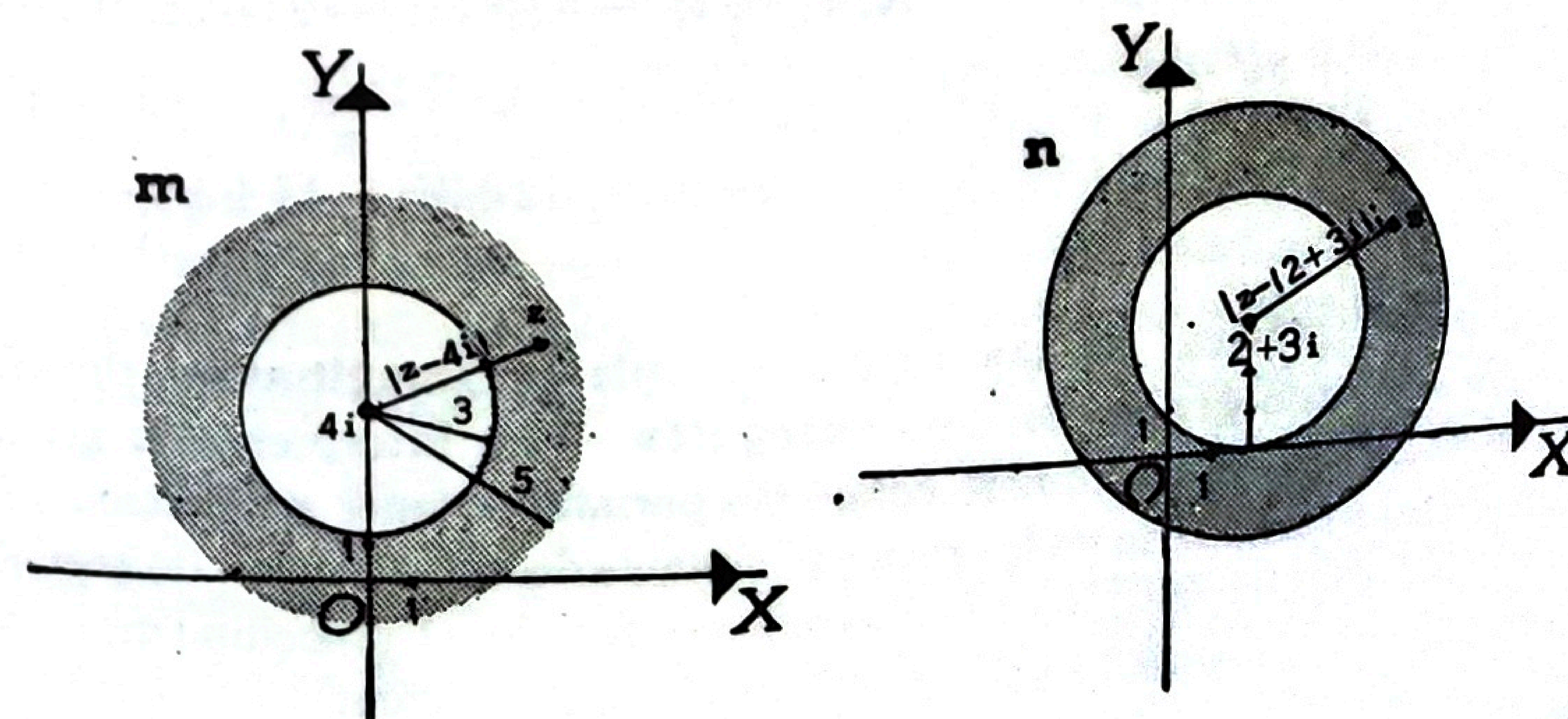
n) $\{z \mid z \in C \wedge 3 \leq |z - (2 + 3i)| \leq 4\}$.

Si se tiene en cuenta que el módulo de un número complejo es la medida de la distancia de su imagen al origen de los ejes, resulta que: la gráfica correspondiente al conjunto a) es la $C_{(O\ y\ 2u)}$, siendo u el segmento unidad (o sea la medida de la distancia del punto (1;0) al origen), porque los puntos de ella y sólo ellos, son los del plano de los ejes XOY cuya distancia a O tiene por medida al número 2; la del conjunto b) es el $Cir_{(O\ y\ 2u)}$ por ser éste el lugar geométrico de los puntos del plano XOY cuya distancia a O es menor o igual al segmento cuya medida es 2; la del conjunto c) es el de los puntos de la $C_{(O\ y\ 2u)}$ y de los exteriores a la misma pues para ellos, y sólo para ellos, se verifica que la medida de su distancia al origen es igual o mayor que 2; la del conjunto d) está formada por los puntos interiores a la $C_{(O\ y\ 2u)}$(*) pues para ellos y sólo para ellos, la medida de su distancia a O es menor que 2. Para representar gráficamente a los conjuntos e) y f) se ha tenido en cuenta que los puntos de la paralela a $OY(OX)$ trazada por el punto de $OX(OY)$ de abscisa (ordenada) 2(—2) son los únicos puntos del plano para los cuales es $x = 2$ $(y = -2)$ y en consecuencia los puntos del semiplano respecto de esa paralela que no contiene (contiene) al origen tienen abscisa $x > 2$ (ordenada $y > -2$). La gráfica correspondiente al conjunto g) es la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ que forma con $\overrightarrow{OX}$ el ángulo $POX = 30^\circ$ porque los puntos de esa semirrecta, y sólo ellos, tienen argumento de 30°; la del conjunto h) es el ángulo $XOP = 45^\circ$ porque los puntos de su lado OP, y sólo ellos, tienen argumento de 45 ; los de su lado OX son los únicos de argumento 0, y los puntos interiores a ese ángulo, y sólo ellos, tienen argumento positivo menores que 45°. La gráfica del conjunto i) es el segundo cuadrante a excepción de los puntos de OY, que tienen argumento igual a $\frac{1}{2}\pi$ y los del semieje negativo de las abscisas que son de argumento igual a π. Por eso hemos representado con trazos punteados a esos semiejes. Las gráficas de los conjuntos j), k), l), m) y n) se han construído teniendo en cuenta que el módulo de la diferencia entre dos números complejos es la medida del segmento que tiene por origen a la imagen del sustraendo y por extremo a la del minuendo y que las imágenes de los números de igual módulo pertenecen a una circunferencia como se vió en los ejercicios a), b), c) y d).

(*) Algunos autores denominan a esa figura *disco abierto*.







11. La regla de Ruffini en el campo complejo. — Es también válida por lo tanto podremos aplicarla para calcular el valor numérico de un polinomio de una variable para un valor complejo imaginario de ésta procediendo como en el campo real (2500 EJERCICIOS DE ALGEBRA, SEGUNDO CURSO, pág 190, X) adoptando la misma disposición práctica para ese cálculo. Así, por ejemplo, el valor numérico del polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$ para $x = 1 - i$ es $P(1 - i) = -4 + 2i$ porque

	1	-3	2	-4
$1 - i$		$1 - i$	$-3 + i$	$2i$
	1	$-2 - i$	$-1 + i$	$-4 + 2i$
	$1 - i$	$1 - i$	$1 - i$	
	$1 - i$	$(-2-1) + (2-1)i$	$(-1+1) + (1+1)i$	

El *cociente* de

$$P(x) : [x + (-1 + i)] = x^2 + (-2 - i)x - (1 - i)$$

y el *resto* es

$$R = -4 + 2i$$

Para $x = i$ es $P(i) = -1 + i$ porque

	1	-3	2	-4
i		i	$-1 - 3i$	$3 + i$
	1	$-3 + i$	$1 - 3i$	$-1 + i$

EJERCICIOS. — *Hallar aplicando la regla de Ruffini los valores numéricos:* $P(i)$; $P(-i)$; $P(1+i)$; $P(1-i)$; $P(-1+i)$; $P(-1-i)$ de:

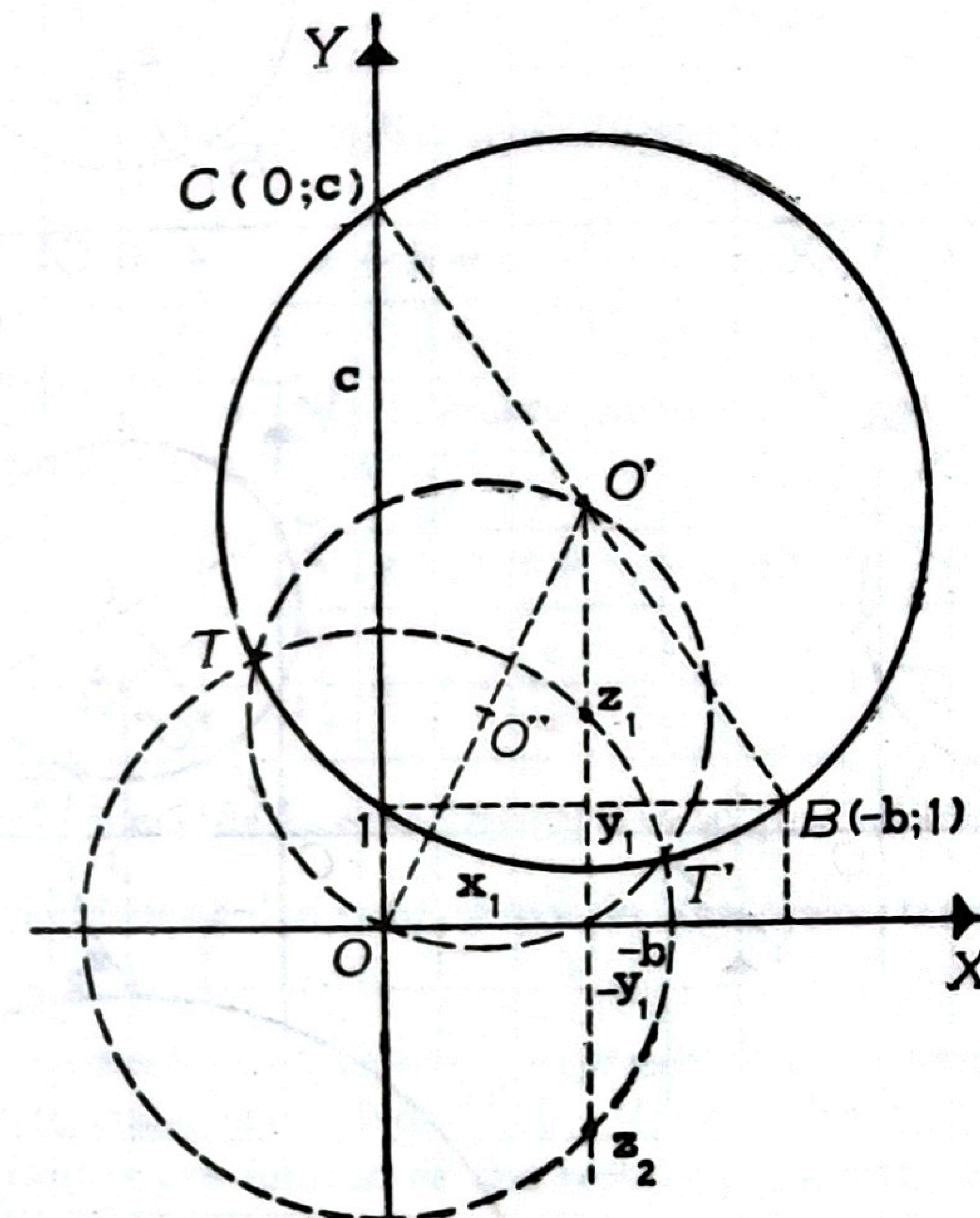
a) $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$ R: i; $-i$; $-2 + 5i$; $-2 - 5i$; $9i$; $-9i$

b) $P(x) = -x^4 + 3x^2 - 1$ R: -5; -5; $3 + 6i$; $3 - 6i$; $3 - 6i$; $3 + 6i$

c) $3x^4 - 2x^2 + x - 1$ R: $4 + i$; $4 - i$; $-12 - 3i$; $-12 + 3i$; $-14 + 5i$; $-14 - 5$.

12. Obtención gráfica de las raíces complejas imaginarias de una ecuación de segundo grado con una incógnita. — La interpretación geométrica de Gauss-Argand de un número complejo, permite obtener gráficamente las componentes real e imaginaria de las raíces complejas de una ecuación de segundo grado con una incógnita, mediante un pequeño agregado al procedimiento aplicado en las páginas 132 y 133, como explicamos a continuación.

Sea, por ejemplo, la ecuación, $x^2 + bx + c = 0$ [1] de raíces complejas imaginarias. En tal caso la circunferencia de centro O' cuyo diámetro tiene por extremos los puntos $B(-b; 1)$ y $C(0; c)$ *no corta* al eje OX. Si se traza la circunferencia de diámetro $\overline{OO'}$ y luego la que tiene por centro al origen y pasa por los



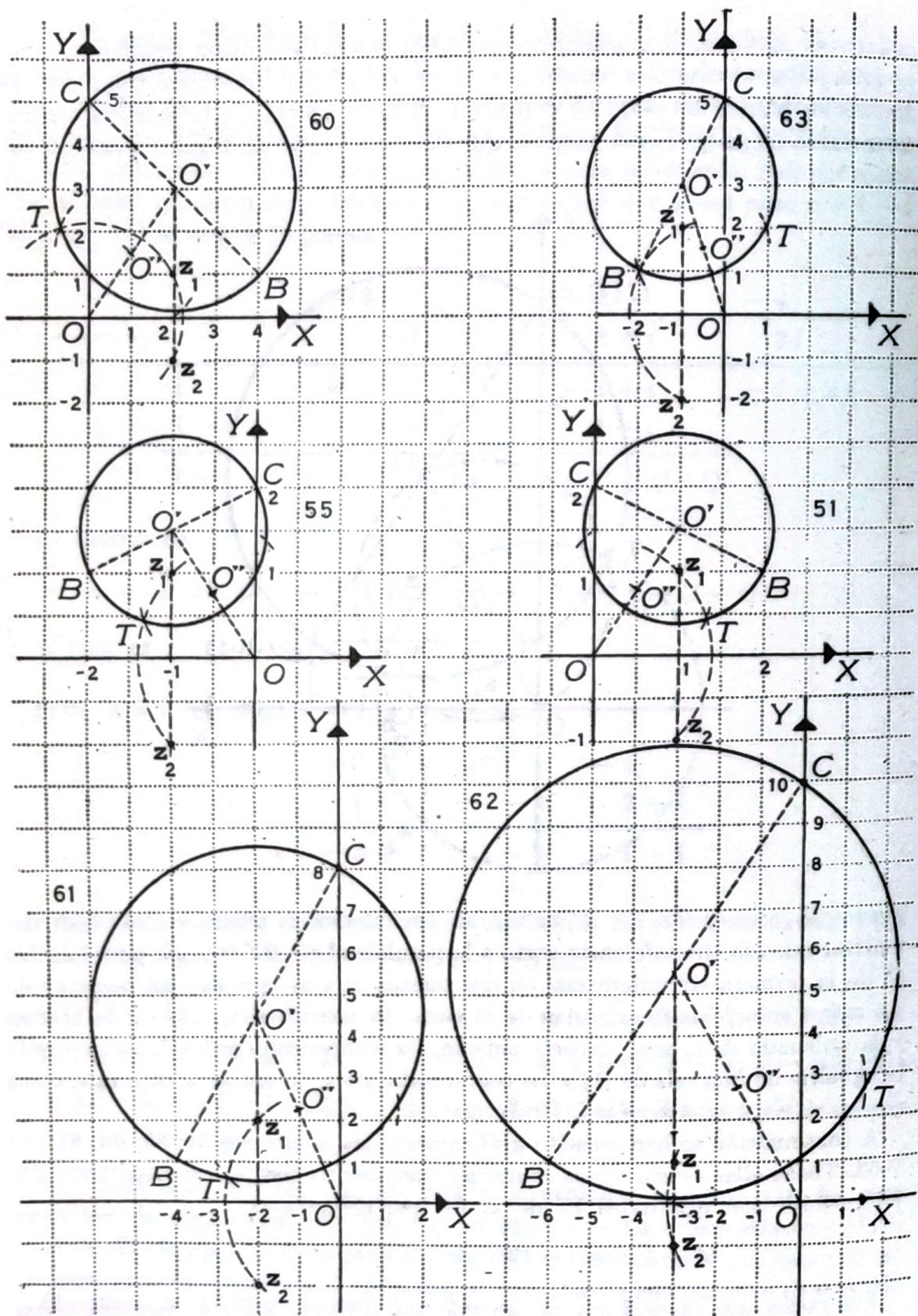
puntos de intersección T y T' de las dos circunferencias anteriores, se puede demostrar que esa circunferencia corta a la paralela al eje OY trazada por el centro O' de la primera circunferencia, en dos puntos z_1 y z_2 que son las *imágenes* de las raíces complejas imaginarias de la ecuación considerada, esto es: la abscisa y la ordenada de z_1 son, respectivamente, la componente real y la componente imaginaria de una raíz de [1] y las coordenadas de z_2 lo son de la otra raíz, o sea $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_1 - y_1 i$. Obsérvese que $z_2 = \overline{z_1}$.

A continuación se han resuelto gráficamente las ecuaciones 51; 55; 60; 61; 62 y 63. Todas ellas tienen raíces complejas imaginarias porque sus respectivos discriminantes son negativos. El de la 51, por ejemplo, es

$$b^2 - 4\,ac = (-4)^2 - 4.1.5 = 16 - 20 = -4.$$

Sus raíces son $x_1 = 2 + i$ y $x_2 = 2 - i$ porque $z_1(2;1)$ y $z_2(2;-1)$.

En la práctica, de las circunferencias de centro O'' y de la de centro O sólo se trazan los arcos suficientes para determinar los puntos buscados.



13. Resolver nomográficamente una ecuación de segundo grado con una incógnita utilizando una hipérbola equilatera y una recta. — Consideremos la ecuación reducida de segundo grado

$$x^2 + bx + c = 0 \qquad [1]$$

Pasando c al segundo miembro y dividiendo la igualdad obtenida por x se tiene

$$x + b = -\frac{c}{x} \qquad [2]$$

Considerando aisladamente cada miembro como una función de la variable independiente x, se tiene el sistema

$$\begin{cases} y = x + b & [3] \\ y = -\dfrac{c}{x} & [4] \end{cases}$$

cuyas raíces son soluciones de la ecuación [2] porque para esos valores se tiene $x + b = -\dfrac{c}{x}$ ∴ $x^2 + bx + c = 0$, y por lo tanto son también raíces de la ecuación dada [1].

Para hallar gráficamente esas raíces se representan sobre un mismo par de ejes cartesianos ortogonales las funciones [3] y [4] obtenidas, teniendo en cuenta que la gráfica de la primera función es una recta y la de la segunda una hipérbola equilátera (MATEMATICAS, IIIer. Curso, págs. 227 a 236). Las abscisas de los puntos de intersección de ambas gráficas (si se cortan) son las raíces de la ecuación dada pues para cada uno de tales puntos los valores de y son iguales y por lo tanto satisfacen a las funciones [3] y [4] y por consiguiente a la ecuación dada [1].

En la gráfica de la página siguiente se han resuelto las ecuaciones

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$; b) $x^2 + 5x - 6 = 0$;
c) $x^2 - 5x + 6 = 0$; d) $x^2 - 5x - 6 = 0$.

Para construir la hipérbola equilátera de ecuación $y = -\dfrac{6}{x}$ utilizada en la resolución de las ecuaciones a) y c) se ha determinado el punto $A(-1;6)$ de la misma y aplicado, luego, el procedimiento explicado en la pág. 169. El punto $A(1;6)$ es el que se utilizó para construir, con el mismo procedimiento, la hipérbola equilátera de ecuación $y = \dfrac{6}{x}$ mediante la cual se han resuelto las ecuaciones b) y d). Para ambas hipérbolas es fácil determinar mentalmente los puntos

que tienen por abscisas a los números 1; 2; 3; —1; —2; —3 (divisores de 6) que resultan ser vértices del cuadriculado.

Las rectas de ecuaciones $y = x + 5$ e $y = x - 5$ se representaron determinando, previamente, los puntos en que ellas cortan a los ejes coordenados que son para la primera los de coordenadas (0;5) y (—5;0) y para la segunda los de coordenadas (0;—5) y (5;0).

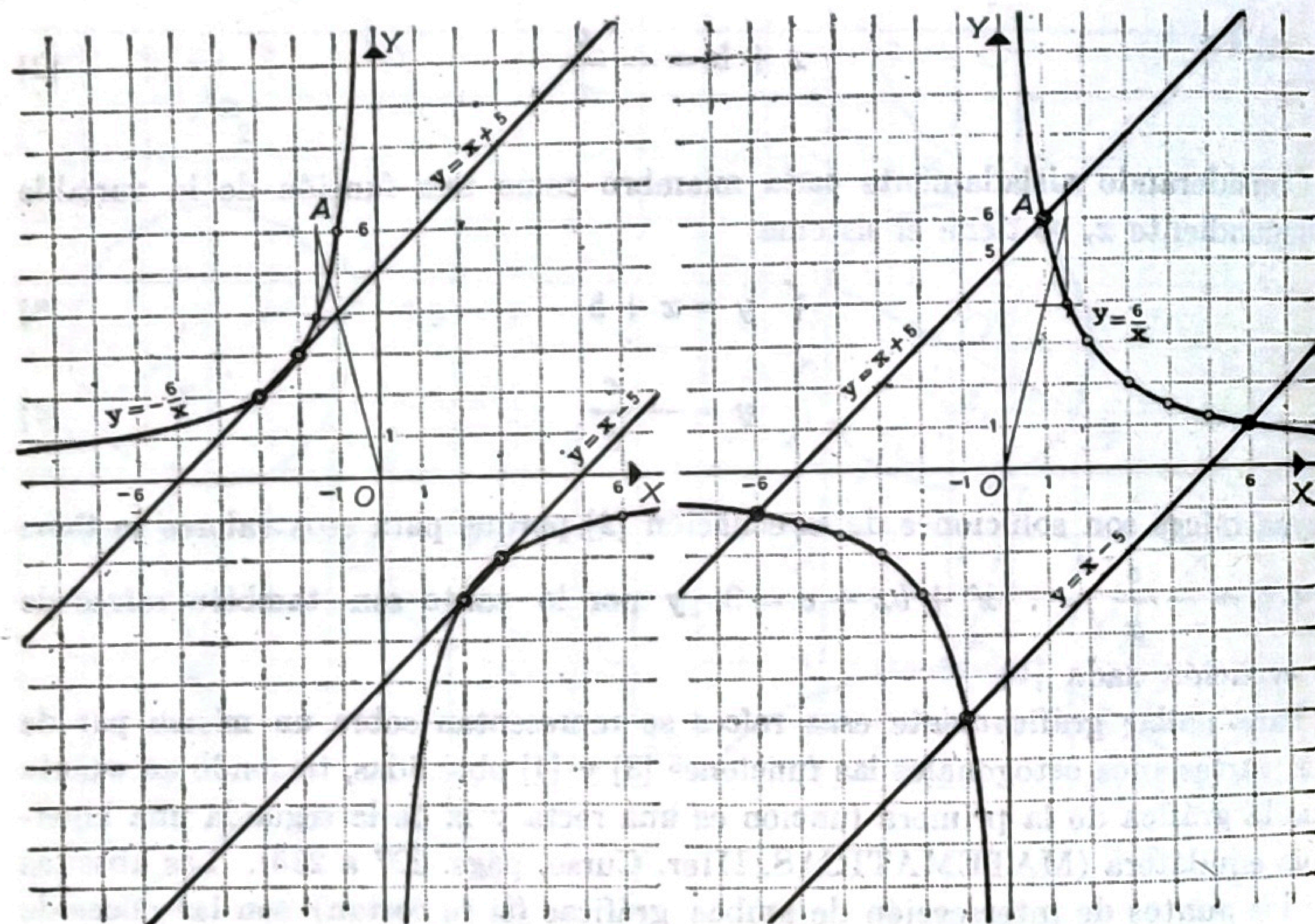


Fig. 1 **Fig. 2**

La Fig. 1 muestra que: a) las raíces de $x^2 + 5x + 6 = 0$ son —2 y —3 porque la recta de ecuación $y = x + 5$ corta al hipérbola en dos puntos que tienen esas abscisas; b) las raíces de la $x^2 - 5x + 6 = 0$ son 3 y 2, abscisas de los puntos en que la mencionada hipérbola es cortada por la recta $y = x - 5$.

De la Fig. 2 resulta: c) las raíces de $x^2 + 5x - 6 = 0$ son 1 y —6; d) las de $x^2 - 5x - 6 = 0$ son 6 y —1. En símbolos:

(*) $\{x \mid x^2 + 5x + 6 = 0\} = \{-2, -3\}$; $\{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{3, 2\}$

$\{x \mid x^2 + 5x - 6 = 0\} = \{1, -6\}$; $\{x \mid x^2 - 5x - 6 = 0\} = \{6, -1\}$

(*) Se lee el conjunto cuyos elementos x son tales que $x^2 + 5x + 6 = 0$ es igual al conjunto que tiene por elementos a —2 y —3. Análogamente se leen los otros.

14. Otra manera de resolver una ecuación de segundo grado con una incógnita. — Sea la ecuación completa general

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad [1]$$

dividiendo por $a \neq 0$ se tiene

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

haciendo $\frac{b}{a} = p$ y $\frac{c}{a} = q$, resulta la ecuación reducida equivalente a la [1]

$$x^2 + px + q = 0 \qquad [2]$$

que transformaremos en otra equivalente y carente de término en x. Para ello hacemos un *cambio de variable* tomando

$$x = X + h \qquad [3]$$

y luego calculamos el valor de h para el cual se anule el término de primer grado con respecto a la nueva variable X.

Sustituyendo [3] en [2], se tiene

$$(X + h)^2 + p\,(X + h) + q = 0 \qquad [4]$$

Podemos evitar escribir el desarrollo del cuadrado del binomio indicado en el primer término de [4], luego el producto de p por el binomio $X+h$ y reducir finalmente los términos semejantes, pensando que los términos de primer grado en X son: el doble del producto del primero por el segundo del mencionado cuadrado del binomio y el producto pX. Asociándolos da

$$2\,hX + pX = (2\,h + p)\,X \quad \text{y para que sea} \quad (2\,h + p)\,X = 0$$

es suficiente que

$$2\,h + p = 0 \quad \therefore \quad h = -\frac{p}{2} \qquad [5]$$

luego es $x = X - \frac{p}{2}$. Reemplazando este valor en [4] da

$$\left(X - \frac{p}{2}\right)^2 + p\left(X - \frac{p}{2}\right) + q = 0$$

Efectuando operaciones y reduciendo los términos semejantes resulta

$$X^2 + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = X^2 - \frac{p^2}{4} + q = 0$$

luego $$X^2 = \frac{p^2}{4} - q \quad \therefore \quad X = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

y por [3] y [5]

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{porque} \quad \frac{p^2}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

Para la resolución de los ejemplos numéricos no es necesario recordar el valor obtenido para h ni para x, sino seguir el procedimiento indicado.

EJEMPLO I. — *Resolver la ecuación*

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad [1[$$

Haciendo el cambio de variable

$$x = X + h \qquad [2]$$

se tiene

$$(X + h)^2 - 4(X + h) + 3 = 0 \qquad [3]$$

El término de primer grado en X obtenido al efectuar las operaciones indicadas en [3], es $(2h - 4)X$ y para que sea $2h - 4 = 0$ debe ser $h = 2$.

Para este valor de h la [3] se convierte en

$(X + 2)^2 - 4(X + 2) + 3 = 0$ y efectuando las operaciones

$X^2 + 4 - 8 + 3 = 0 \therefore X^2 - 1 = 0 \therefore X^2 = 1 \therefore X = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

y por [2] $x = \pm 1 + 2 \therefore x_1 = +1 + 2 = +3$ y $x_2 = -1 + 2 = +1$.

EJEMPLO II. — *Resolver la ecuación:*

$$2x^2 - x - 6 = 0$$

Dividiendo ambos miembros por 2, se tiene

$$x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$$

y para el cambio de variable

$$x = X + h \qquad [1]$$

resulta

$$(X + h)^2 - \frac{1}{2}(X + h) - 3 = 0 \qquad [2]$$

y para que desaparezca el término de primer grado en X que es $\left(2h - \frac{1}{2}\right)X$

debe ser $2h - \frac{1}{2} = 0 \therefore h = \frac{1}{4}$ luego $x = X + \frac{1}{4}$ para el cual la [2] se transforma en $\left(X + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{4}\right) - 3 = 0.$

Efectuando las operaciones indicadas y reduciendo términos da

$$X^2 + \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - 3 = 0$$

o sea

$$X^2 + \frac{1 - 2 - 48}{16} = X^2 - \frac{49}{16} = 0$$

de donde $X^2 = \frac{49}{16}$ y $X = \pm\frac{7}{4}$ y por [1]

$$x = \pm\frac{7}{4} + \frac{1}{4} \therefore x_1 = +\frac{7}{4} + \frac{1}{4} = 2 \; ; \; x_2 = -\frac{7}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{3}{2}$$

15. Obtención de las raíces cuadradas de un complejo dado en forma binómica. — *Verificar que las raíces cuadradas del complejo $z = a + bi$ son*

$$\sqrt{((a + bi))} = \pm\sqrt{\frac{\rho + a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\rho - a}{2}} \quad \text{siendo} \quad \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

y entendiendo que los radicales del segundo miembro se toman con el mismo signo o con signo contrario según que sea b *positivo o negativo respectivamente.*

En efecto: es $\sqrt{\frac{\rho + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\rho - a}{2}}$ una raíz de $a + bi$ porque

$$\left(\sqrt{\frac{\rho + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\rho - a}{2}}\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{\rho + a}{2}}\right)^2 + i\sqrt{\frac{\rho + a}{2}}\sqrt{\frac{\rho - a}{2}} + i^2\left(\sqrt{\frac{\rho - a}{2}}\right)^2$$

simplificando raíces y exponentes y teniendo presente que $i^2 = -1$

$$\left(\sqrt{\frac{\rho + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\rho - a}{2}}\right)^2 = \frac{\rho + a}{2} + i\,2\sqrt{\frac{(\rho + a)(\rho - a)}{4}} - \frac{\rho - a}{2}$$

$$= \frac{\rho + a - \rho + a}{2} + i\,2\sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{4}} = a + i\sqrt{\rho^2 - a^2}$$

Siendo $\rho^2 = a^2 + b^2$ es $b^2 = \rho^2 - a^2$ y $\sqrt{\rho^2 - a^2} = \sqrt{b^2} = b$

luego $$\left(\sqrt{\frac{\rho + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\rho - a}{2}}\right)^2 = a + bi$$ lo cual prueba que $\sqrt{\frac{\rho + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\rho - a}{2}}$ es una raíz de $a + bi$. En la misma forma se verifica que la otra raíz es $-\sqrt{\frac{\rho + a}{2}} - i\sqrt{\frac{\rho - a}{2}}$ y las que son raíces de $a - bi$.

Ejemplos. — *Las raíces cuadradas de* $3 + 4i$ *son*

$$\sqrt{((3+4i))} = \begin{cases} \sqrt{\frac{5+3}{2}} + i\sqrt{\frac{5-3}{2}} = \sqrt{4} + i\sqrt{1} = 2 + i \\ -\sqrt{\frac{5+3}{2}} - i\sqrt{\frac{5-3}{2}} = -\sqrt{4} - i\sqrt{1} = -2 - i \end{cases}$$

pues $$\rho = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

las de $3 - 4i$ son

$$\sqrt{((3-4i))} = \begin{cases} \sqrt{\frac{5+3}{2}} - i\sqrt{\frac{5-3}{2}} = \sqrt{4} - i\sqrt{1} = 2 - i \\ -\sqrt{\frac{5+3}{2}} + i\sqrt{\frac{5-3}{2}} = -\sqrt{4} + i\sqrt{1} = -2 + i \end{cases}$$

las de $-3 + 4i$ son

$$\sqrt{((-3+4i))} = \begin{cases} \sqrt{\frac{5-3}{2}} + i\sqrt{\frac{5+3}{2}} = 1 + 2i \\ -\sqrt{\frac{5-3}{2}} - i\sqrt{\frac{5+3}{2}} = -1 - 2i \end{cases}$$

y las de $-3 - 4i$ son

$$\sqrt{((-3-4i))} = \begin{cases} \sqrt{\frac{5-3}{2}} - i\sqrt{\frac{5+3}{2}} = 1 - 2i \\ = -1 + 2i \end{cases}$$

Ejercicios. — *Calcular las raíces cuadradas siguientes:*

a) $\sqrt{((5 + 12i))}$ R: $3 + 2i$ y $-3 - 2i$

b) $\sqrt{((5 - 12i))}$ R: $-3 + 2i$ y $3 - 2i$

c) $\sqrt{((-5 + 12i))}$ R: $2 + 3i$ y $-2 - 3i$

d) $\sqrt{((-5 - 12i))}$ R: $2 - 3i$ y $-2 + 3i$

e) $\sqrt{((7 + 24i))}$ R: $4 + 3i$ y $-4 - 3i$

f) $\sqrt{((16 - 30i))}$ R: $5 - 3i$ y $-5 + 3i$

g) $\sqrt{((-3 - 4i))}$ R: $1 - 2i$ y $-1 + 2i$

h) $\sqrt{((i))}$ R: $\sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}$ y $-\sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}$

i) $\sqrt{((-i))}$ R: $\sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}$ y $-\sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}$

j) $\sqrt{((8i))}$ R: $2 + 2i$ y $-2 - 2i$

k) $\sqrt{((-18i))}$ R: $3 - 3i$ y $-3 + 3i$

l) $\sqrt{\left(\left(\frac{-3}{16} + \frac{1}{4}i\right)\right)}$ R: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$ y $-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i$

m) $\sqrt{\left(\left(\frac{-3}{16} - \frac{1}{4}i\right)\right)}$ R: $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$ y $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i$

n) $\sqrt{((0{,}03 + 0{,}04i))}$ R: $0{,}2 + 0{,}1i$ y $-0{,}2 - 0{,}1i$

p) $\sqrt{((-0{,}09 + 0{,}4i))}$ R: $0{,}4 + 0{,}5i$ y $-0{,}4 - 0{,}5i$

q) $\sqrt{((-1 + i2\sqrt{6}))}$ R: $\sqrt{2} + i\sqrt{3}$ y $-\sqrt{2} - i\sqrt{3}$

r) $\sqrt{((5 + i10\sqrt{2}))}$ R: $\sqrt{10} + i\sqrt{5}$ y $-\sqrt{10} - i\sqrt{5}$

s) $\sqrt{((7 + i\sqrt{15}))}$ R: $\sqrt{7{,}5} + i\sqrt{0{,}5}$ y $-\sqrt{7{,}5} - i\sqrt{0{,}5}$

t) $\sqrt{((5 - i2\sqrt{6}))}$ R: $\sqrt{6} - i$ y $-\sqrt{6} + i$

u) $\sqrt{((-2 + i4\sqrt{6}))}$ R: $2 + i\sqrt{6}$ y $-2 - i\sqrt{6}$

16. Ecuaciones de segundo grado con coeficientes complejos. — Se resuelven con las mismas fórmulas empleadas para las de coeficientes reales.

Así por ejemplo, para la ecuación

$$i x^2 - (1 + 2i) x + 2 = 0 ,$$

se tiene

$$x = \frac{1 + 2i \pm \sqrt{(1 + 2i)^2 - 4 . i . 2}}{2i} = \frac{1 + 2i \pm \sqrt{1 + 4i + 4i^2 - 8i}}{2i} =$$

$$= \frac{1 + 2i \pm \sqrt{1 + 4i - 4 - 8i}}{2i} = \frac{1 + 2i \pm \sqrt{-3 - 4i}}{2i} \qquad [1]$$

Para hallar $\sqrt{((-3 - 4i))}$ aplicamos el procedimiento seguido en la pág. 261 teniendo en cuenta que $\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$,

luego $\sqrt{((-3 - 4i))} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{5-3}{2}} - \sqrt{\dfrac{5+3}{2}}\, i = 1 - 2i \\ -\sqrt{\dfrac{5-3}{2}} + \sqrt{\dfrac{5-3}{2}}\, i = -1 + 2i \end{cases}$

reemplazando sucesivamente estos valores en [1], resulta

$$x_1 = \frac{1 + 2i + 1 - 2i}{2i} = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} ; \quad x_2 = \frac{1 + 2i - 1 + 2i}{2i} = \frac{4i}{2i} = 2$$

— • —

Para la ecuación reducida $x^2 - 2ix + (-1 + 2i) = 0$, se tiene

$$x = i \pm \sqrt{i^2 - (-1 + 2i)} = i \pm \sqrt{-1 + 1 - 2i} = i \pm \sqrt{-2i}$$

y como $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$, resulta que

$$\sqrt{((-2i))} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2+0}{2}} - \sqrt{\dfrac{2-0}{2}}\, i = 1 - i \\ -\sqrt{\dfrac{2+0}{2}} + \sqrt{\dfrac{2-0}{2}}\, i = -1 + i \end{cases}$$

y con estos valores se tiene

$$x_1 = i + 1 - i = 1 \quad ; \quad x_2 = i - 1 + i = -1 + 2i$$

EJERCICIOS. — *Resolver las ecuaciones siguientes:*

a) $x^2 + (2 - 2i) x + 4i = 0$ R: $x_1 = -2i$; $x_2 = -2$

b) $x^2 - (2 + i) x + 8i = 0$ R: $x_1 = 4$; $x_2 = 2i$

c) $x^2 - (3 + i) x + 2 + 2i = 0$ R: $x_1 = 2$; $x_2 = 1 + i$

d) $x^2 + (1 + i) x + i = 0$ R: $x_1 = -i$; $x_2 = -1$

e) $x^2 - (1 + i) x + i = 0$ R: $x_1 = 1$; $x_2 = i$

f) $x^2 - (5 + i) x + (8 + i) = 0$ R: $x_1 = 3 + 2i$; $x_2 = 2 - i$

g) $x^2 - (5 - i) x + (8 - i) = 0$ R: $x_1 = 3 - 2i$; $x_2 = 2 + i$

h) $x^2 - 4ix - (7 + 4i) = 0$ R: $x_1 = 2 + 3i$; $x_2 = -2 + i$

i) $x^2 - 3ix - (11 + 3i) = 0$ R: $x_1 = 3 + i$; $x_2 = -3 + 2i$

j) $x^2 + ix + (1 + 3i) = 0$ R: $x_1 + 1 + i$; $x_2 = -1 - 2i$

k) $ix^2 - x + 2i = 0$ R: $x_1 = \frac{2}{i}$; $x_2 = -\frac{1}{i}$

l) $ix^2 + 3x - 2i = 0$ R: $x_1 = -\frac{1}{i}$; $x_2 = -\frac{2}{i}$

m) $ix^2 - (1 + 3i) x + 3 = 0$ R: $x_1 = -\frac{1}{i}$; $x_2 = 3$

n) $(2 - i) x^2 - (4 + i) x + (1 + i) = 0$ R: $x_1 = -\frac{3+i}{2-i}$; $x_2 = -\frac{1}{2-i}$

p) $(2 - i) x^2 + (4 + i) x + (1 + i) = 0$ R: $x_1 = -\frac{1}{2-i}$; $x_2 = -\frac{3+i}{2-i}$

q) $(1 + i) x^2 - 3x + (1 - i) = 0$ R: $x_1 = \frac{2}{1+i}$; $x_2 = \frac{1}{1+i}$

r) $(1 + 3i) x^2 - 3x - (1 - 3i) = 0$ R: $x_1 = \frac{5}{1+3i}$; $x_2 = -\frac{2}{1+3i}$

s) $2ix^2 - 3x - 2i = 0$ R: $x_1 = \frac{2}{i}$; $x_2 = -\frac{1}{2i}$

t) $2ix^2 + 5x - 2i = 0$ R: $x_1 = -\frac{1}{2i}$; $x_2 = -\frac{2}{i}$

u) $4ix^2 + 7x + 2i = 0$ R: $x_1 = \frac{1}{4i}$; $x_2 = -\frac{2}{i}$

EJERCICIOS, PARADOJAS Y CURIOSIDADES

Simplificación conveniente. — 1. Hay expresiones (*) aparentemente complicadas que se reducen a formas sencillísimas si se saben simplificar. Por ejemplo: cada uno de los radicales múltiples

a) $\sqrt{6-\sqrt{6}-\sqrt{15-6\sqrt{6}}}$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\left[11-\sqrt{21}+\sqrt{6\left(5-\sqrt{21}\right)}\right]}$

se reducen a $\sqrt{3}$ *¿Cómo?*

Paradojas. — 2. *Siendo*

$1\ \$ = 100$ cts. *es* $\sqrt{1\ \$} = \sqrt{100 \text{ cts.}}$ $\therefore$ $1\ \$ = 10$ cts.

¿Es verdadero ese resultado? ¿Por qué?

3. *Si* $a \neq 0$ *es* $(-a)^2 = (+a)^2$ $\therefore$ $\sqrt{(-a)^2} = \sqrt{(+a)^2}$

o sea $-a = +a.$

¿Porqué se obtiene este resultado absurdo?

4. *Siendo* $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$ *es*

$$\sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}} \quad \therefore \quad \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$$

$\therefore$ $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{1}\cdot\sqrt{1}$ *es decir* $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = \left(\sqrt{1}\right)^2$

y simplificando $-1 = 1.$ *¿Porqué se obtiene ese resultado absurdo?*

(*) I. Ghersi, *Matematica dilettevole e curiosa*, U. Hoepli, Milano, 1921.

5. Siendo $8 > 4$

y $\log\frac{1}{2} = \log\frac{1}{2}$

es $8\log\frac{1}{2} > 4\log\frac{1}{2}$ $\therefore$ $\log\left(\frac{1}{2}\right)^8 > \log\left(\frac{1}{2}\right)^4$ por log. pot.

y por def. pot. exp. neg. $\log 2^{-8} > \log 2^{-4}$

luego $2^{-8} > 2^{-4}$

es decir $\frac{1}{256} > \frac{1}{16}$ $\therefore$ $16 > 256$ *absurdo*

¿de dónde proviene?

6. Sea $x \neq y$ luego $x^2-2xy+y^2 = y^2-2xy+x^2$ por prop. conm.

o bien $(x-y)^2 = (y-x)^2$ por cuad. de un bin.

de donde $\log(x-y)^2 = \log(y-x)^2$ por prop. unif. log.

y $2\log(x-y) = 2\log(y-x)$ por log. pot.

Simplificando $\log(x-y) = \log(y-x)$

por lo tanto $x-y = y-x.$ Y trasponiendo términos $2x = 2y$ $\therefore$ $y = x$ absurdo pues $x \neq y$ por hipót.

¿De dónde proviene este absurdo?

7. No por mucho andar se llega muy lejos — *Si se supone que un móvil se mueve indefinidamente de acuerdo con la siguiente ley: durante el primer segundo de marcha se aleja 600 m del punto de partida y en lo que sigue recorre en cada segundo los* $\frac{5}{6}$ *de lo recorrido durante el segundo precedente. ¿A qué distancia del punto de partida llega?*

R: A 3600 m a pesar de marchar indefinidamente ¿por qué?

8. *¿Al cabo de cuánto tiempo se duplica un capital colocado a interés compuesto al 5 % anual, capitalizando anualmente?*

R: 15 años aproximadamente.

9. Los grandes números. — Herencia fabulosa. — *Si al iniciarse nuestra era alguien hubiese colocado 1 $ a interés compuesto al 5 % anual, capitalizando anualmente, ¿cuánto correspondería a sus herederos al finalizar el año 1960?*

R: $C_n = 1 \cdot (1+0{,}5)^{1960} = 1{,}05^{1960}$.

Para obtener un valor aproximado de la cuantiosísima fortuna acumulada, tengamos en cuenta que, de acuerdo con el ejercicio anterior, una suma colocada a interés compuesto al 5 % anual, capitalizando anualmente, se duplica al cabo de 15 años, y que 1960 contiene a 15 años 130 veces, luego el 1 $ colocado se ha transformado en 2 $ al finalizar el año 15, en 2^2 $ = 4 $ al finalizar el año 30; ..., en 2^{130} $ al finalizar el año 1960.

Al resolver el ejercicio nº 152 de pág. 87, vimos que

$$2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$$

Como $\quad 1960 \,|\, \underline{15} \quad$ cociente 130, resto 10 $\quad$ y $\quad 130 \,|\, \underline{64} \quad$ cociente 2, resto 2 $\quad$ es $\quad 130 = 64 \cdot 2 + 2$

luego $\quad 2^{130} = 2^{64 \cdot 2 + 2} = (2^{64})^2 \cdot 2 = (18\,446\,744\,073\,709\,551\,616)^2 \cdot 2$

resultado que tiene 40 cifras por lo menos, lo cual significa que la fortuna acumulada sería del orden del *millar de sextillones*. Recuérdese que

$$1000 \textit{ sextillones} = 1000 \cdot 10^{36} = 10^{39} = \overbrace{1000\,000 \ldots\ldots 000\,000}^{39}$$

Si esa suma se pagara en billetes de 1000 $ agrupados en fajos de 1000 000 $, y esos fajos (*) se colocaran uno al lado del otro hasta cubrir toda la superficie de la República que supondremos es de 3 000 000 km², y luego en capas sucesivas iguales a las anteriores, la pila que formarían esas capas tendría *una altura de más de cinco veces la distancia Tierra-Sol*, que es de 150 millones de kilómetros.

10. Conjuntos finitos e infinitos. — "Para formarse una idea del abismo que separa los conceptos de *finito* e *infinito* voy a exponer (**) un ejemplo de Fraenkel en esencia debido a Kummer, por considerarlo realmente sugestivo".

"Supongamos que el material necesario para la impresión de un libro cualquiera es un sistema de 100 signos, que contiene todas las vocales y consonantes mayúsculas, minúsculas y acentuadas, las diez cifras, los signos de puntuación y también el espacio, es decir el tipo necesario para que en la impresión queden vacíos entre las palabras. Hagamos la hipótesis — harto generosa — de que un libro debe contener 10 000 000 de signos de tal especie; lo que no acontece con ninguno de los impresos hasta ahora. Los libros de menor extensión quedarán incluídos entre ellos, pues los signos que faltan para completar ese enorme número puede suponerse que son espacios consecutivos en blanco. Este el sentido que damos a la palabra *libro* en lo que sigue. Consideremos ahora el *conjunto de todos los libros posibles*".

"Como todo libro es una variación con repetición de nuestros 100 signos tomados de 10 000 000 en 10 000 000, se comprende que sólo hay un número finito de tales variaciones. Dicho número, que para abreviar designaremos con N, es exactamente

$$100^{10\,000\,000} = (10^2)^{10\,000\,000} = 10^{20\,000\,000}$$

o sea 1 seguido de 20 000 000 de ceros. Tal es el número de libros distintos; entre ellos están todos los escritos religiosos y filosóficos del pasado y del futuro, todo los dramas y todas las poesías, todos los libros de la antigüedad que se han encontrado, los que se encontrarán en adelante y otros que permanecerán eternamente desconocidos para la humanidad, e igualmente estarán todos los diccionarios, todos los catálogos imaginables, las tablas de logaritmos, los artículos de periódicos escritos hasta ahora y los que se escriban en lo sucesivo, la descripción de todos los inventos conocidos y futuros, todas las partidas de nacimiento, de casamiento y defunción, las actas de todas las academias del mundo habidas y por haber, etc., etc., todas las composiciones sin sentido y también, Señoras, todo el epistolario del amor. En resumen todos esos libros constituyen una biblioteca universal en el más amplio sentido de la palabra. Un simple cálculo probaría que por pequeños que fueran los tipos y delgado que fuera el papel en que están impresos, el espacio de universo que ocuparían, se extendería hasta las estrellas visibles más lejanas y éste sólo sería una parte insignificante del lugar ocupado por nuestra biblioteca".

"En consecuencia, para recorrer uno solo de sus anaqueles, un rayo de luz — con su fantástica velocidad de 300 000 km por segundo — tardaría centurias en hacerlo".

"Para apreciar cuan enorme es el abismo que separa un conjunto tan extraordinariamente numeroso como el precedente, de un conjunto de *infinitos* elementos, basta la siguiente consideración: si existieran *infinitos* cuerpos celestes con habitantes que hablaran e imprimieran como nosotros y cultivaran la Matemática, aparecerían, forzosamente, en las bibliotecas de esos diversos astros, un mismo tratado de Matemáticas, rubricado por el mismo autor, la misma fecha de publicación y aún con las mismas erratas ya que N es finito, mientras que el conjunto de cuerpos celestes lo hemos supuesto infinito".

(*) Suponemos que las dimensiones de un fajo son: 18 cm. 8 cm. 1 cm.

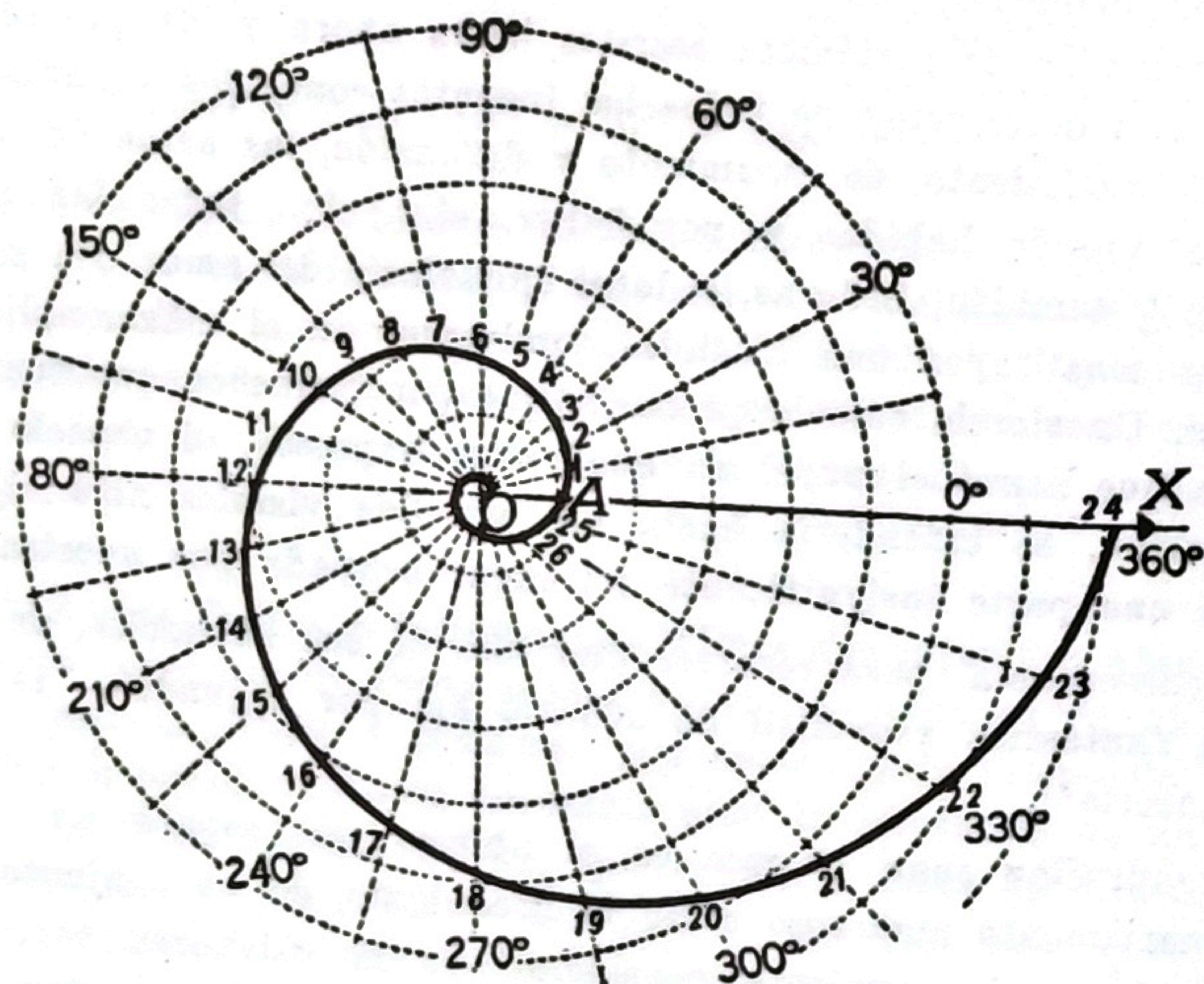
(**) Juan Blaquier, *El axioma de Zermelo*. Buenos Aires. 1942.

11. Espiral logarítmica. — Si se consideran, en un cierto orden, a partir de la $\overrightarrow{OX}$ las semirrectas $\overrightarrow{O1}$, $\overrightarrow{O2}$, $\overrightarrow{O3}$, . . . , $\overrightarrow{O23}$

tales que los ángulos formados por dos consecutivas sean de 15°; sobre la primera de ellas consideramos un segmento cualquiera $\overline{O1}$, cuya medida con respecto a cierta unidad *u* llamamos ρ, sobre la segunda el $\overline{O2}$ de medida ρ^2, sobre la tercera el $\overline{O3}$ de medida ρ^3, y así sucesivamente. Como la semirrecta $\overrightarrow{O23}$, puede también obtenerse al formar con la $\overrightarrow{OX}$ el ángulo negativo de 15°; la $\overrightarrow{O24}$ formando con la $\overrightarrow{O23}$ también un ángulo negativo de 15°...

sobre la primera llevamos el segmento $\overline{O25}$ de medida $\rho^{-1} = 1 : \rho$;

sobre la $\overrightarrow{O26}$ el segmento de $\overline{O26}$ de medida $\rho^{-2} = 1 : \rho^2$;...

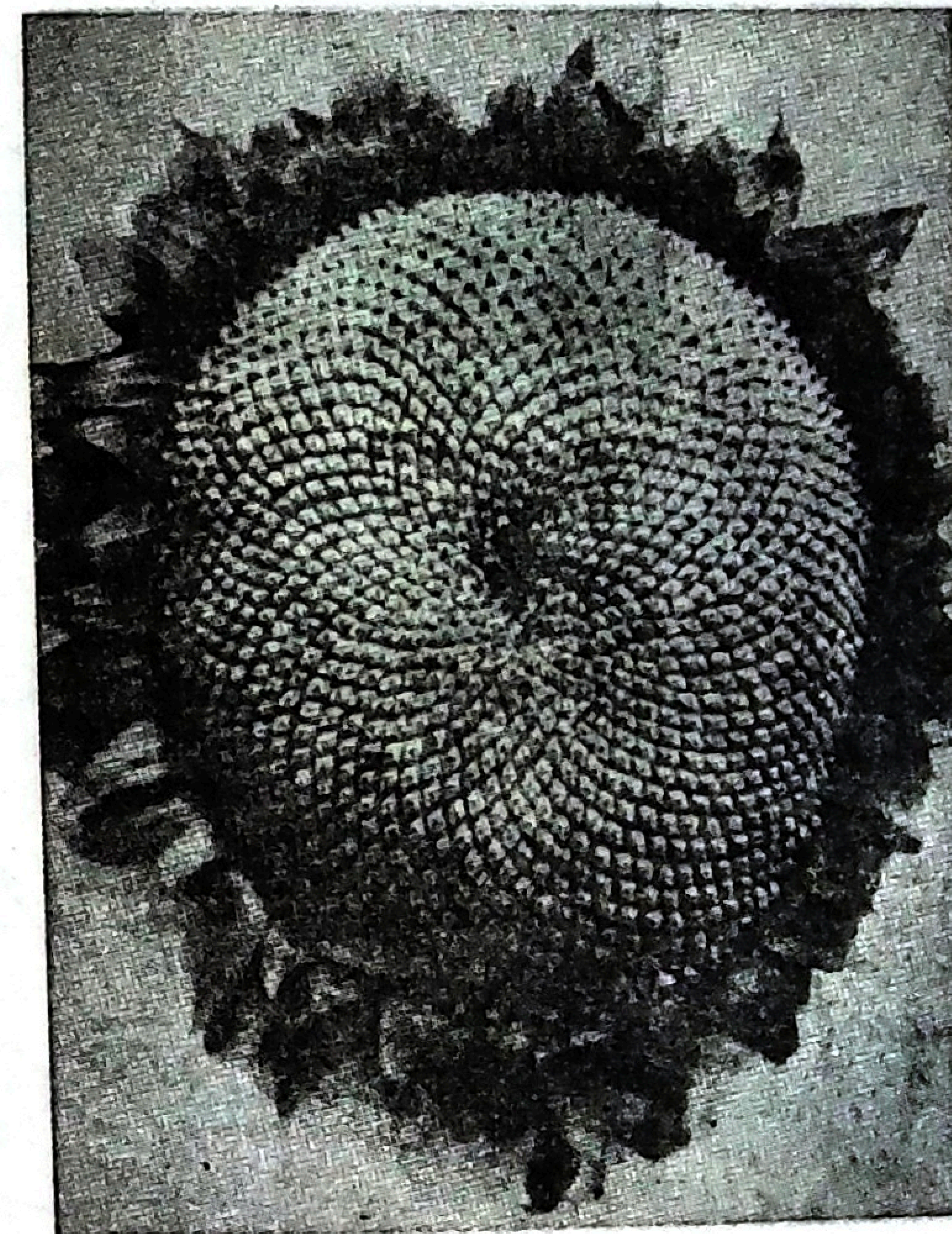


y los puntos así obtenidos pertenecen a una curva denominada *espiral logarítmica*. Este nombre se justifica pues se demuestra (*) que dicha curva es

(*) Véase nuestra *Geometría Analítica del Plano*, págs. 497 a 499.

el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que los logaritmos de las medidas de las distancias de esos puntos al polo ("radios vectores") son proporcionales a los respectivos "argumentos" (ángulos que forman con OX las semirrectas determinadas por O con cada punto).

La Matemática y la Naturaleza. — Esta curva se encuentra en la Naturaleza con mucha frecuencia, por ejemplo en las flores de los mirasoles o girasoles, en las que puede observarse que las semillas están sobre espirales logarítmicas que a partir del centro de la flor se van abriendo en el sentido del movimiento de las agujas de un reloj unas y en el sentido contrario otras.



Se comprueba, además, que las flores de diámetros normales que son de 12,5 cm a 15 cm, suelen tener 34 espirales de un sentido y 55 de sentido contrario. Esos números son términos consecutivos de la *Sucesión de Fibonacci* (*Leonardo*, italiano, 1180? - 1250?) que se forma así: primer término 0, segundo 1 y a partir de éste cada término es igual a la suma de los dos anteriores, es decir:

0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; . . .

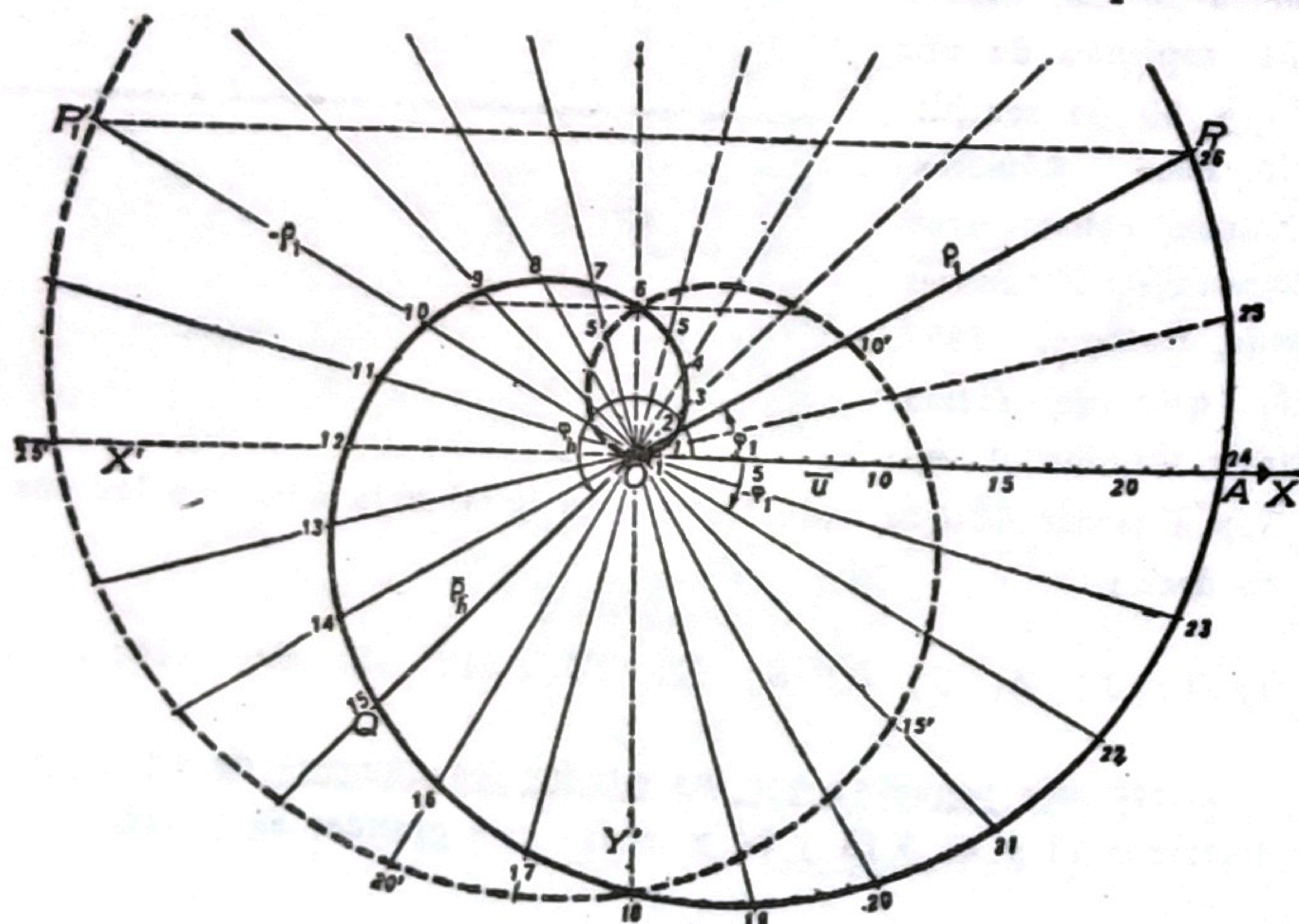
En las flores más pequeñas que las citadas los números de espirales suelen ser los términos 13 y 21 ó 21 y 34 y en las más grandes 89 y 144.

También pueden observarse espirales logarítmicas en las margaritas y en



los asters; en las caparazones de muchos caracoles y otros moluscos, en particular, en las del Nautilus como se ve en la figura adjunta.

12. Espiral de Arquímedes. — Si se consideran, en un cierto orden, 24 semirrectas del mismo origen O de manera que los ángulos que forman dos



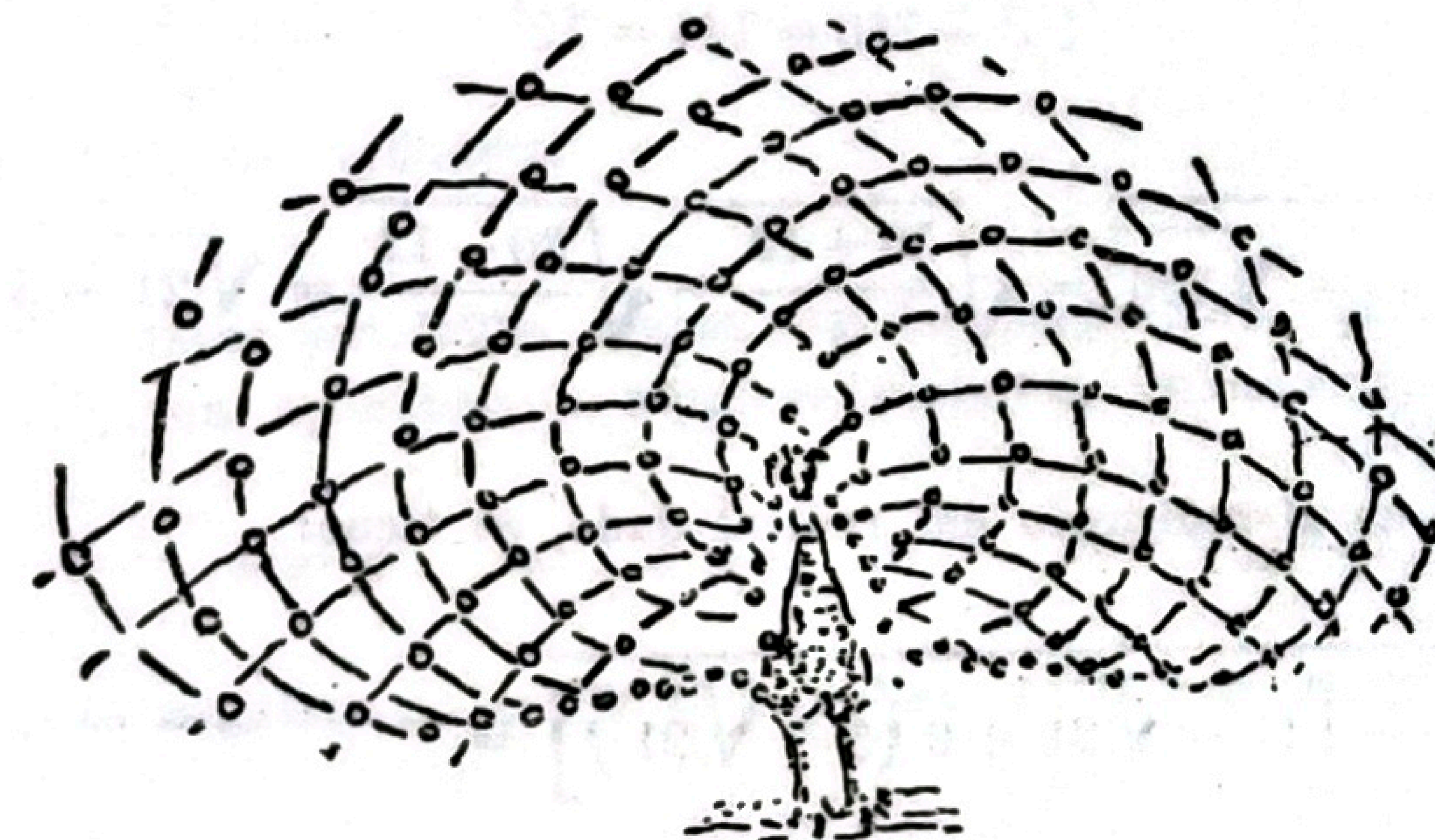
consecutivas cualesquiera sean de 15° cada uno, se toma un segmento cual-

quiera OA, cuya medida con respecto a la unidad u es el número p; se lleva sobre ellas los segmentos

$$\frac{\overline{OA}}{24}, \quad 2\,\frac{\overline{OA}}{24}, \quad 3\,\frac{\overline{OA}}{24}, \ldots\ldots, \quad 23\,\frac{\overline{OA}}{24}, \text{ respectivamente.}$$

Los puntos así obtenidos pertenecen a una *espira* de la curva denominada *espiral de Arquímedes* que, puede demostrarse (*), es *el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que los radios vectores de esos puntos son proporcionales a los respectivos argumentos.*

La espira dibujada con trazo punteado corresponde a valores negativos del argumento. En la figura que sigue se puede apreciar cómo se entrecruzan las espirales de Arquímedes en la cola de un pavo real.



Soluciones. — 1. *Simplificación conveniente.* Se transforma el radical doble

$$15 - 6\sqrt{6} = 15 - \sqrt{216}$$

tomando la combinación de signos + para el primer radical y — para el segundo y teniendo en cuenta que $15^2 - 216 = 225 - 216 = 9 = 3^2$, da:

$$\sqrt{15 - 6\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{15+3}{2}} - \sqrt{\frac{15-3}{2}} = \sqrt{9} - \sqrt{6} = 3 - \sqrt{6}$$

(*) Véase nuestra *Geometría Analítica del Plano*, págs. 490 a 497.

Sustituyendo este valor en el radicando del radical múltiple dado resulta

$$\sqrt{6-\sqrt{6}-\sqrt{15-6\sqrt{6}}} = \sqrt{6-\sqrt{6}-3+\sqrt{6}} = \sqrt{3}$$

b) Transformando el radical doble

$$\sqrt{6\left(5-\sqrt{21}\right)} = \sqrt{30-\sqrt{756}}$$

con la combinación de signos + y —, teniendo en cuenta que

$$30^2 - 756 = 144 = 12^2$$

da:
$$\sqrt{30-\sqrt{756}} = \sqrt{\frac{30+12}{2}} - \sqrt{\frac{30-12}{2}} = \sqrt{21} - 3$$

Sustituyendo en el radicando del radical dado, se tiene:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\left[11-\sqrt{21}+6\left(5-\sqrt{21}\right)\right]} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\left[11-\sqrt{21}+\sqrt{21}-3\right]} = \frac{1}{2}\sqrt{3 \cdot 4} = \sqrt{3}$$

Paradojas. — 2. — Es falso porque contradice a la primera igualdad que es verdadera y se ha llegado a esa conclusión falsa por haber aplicado a las cantidades, sin saber si era lícito hacerlo, la definición y propiedades de las raíces cuadradas de números. Sólo se ha operado con los coeficientes de los números concretos 1 $ y 100 cts sin tener en cuenta la expresión simbólica de las unidades.

3. Porque no se ha tenido en cuenta que la raíz cuadrada de un número tiene dos valores del mismo valor absoluto y de signo contrario. Debió considerárselos y desechar la solución extraña que conduce a la contradicción apuntada, escribiendo $-a = -(+a)$ resultando verdadero por que $a \neq 0$, por hipótesis.

4. Porque hemos aplicado propiedades de los radicales a expresiones que no lo son por ser raíces cuadradas de números negativos.

5. De no haber tenido en cuenta que $\log \frac{1}{2}$ es negativo y que si se multiplican ambos miembros de una desigualdad por un número negativo se obtiene otra desigualdad de *sentido contrario*, o sea

$$2^{-8} < 2^{-4} \quad \therefore \quad 16 < 256$$

que es un resultado verdadero.

6. Por no haber tenido en cuenta que las propiedades estudiadas para la logaritmación son aplicables a números positivos, únicamente, y que siendo

$$x \neq y \quad \text{es} \quad x \gtrless y \quad \therefore \quad x - y \gtrless 0.$$

Si $x - y$ es negativo no existe su logaritmo en el campo real.

7. Porque $600 \text{ m}\,;\ 600 \text{ m}\frac{5}{6}\,;\ 600 \text{ m}\left(\frac{5}{6}\right)^2;\ 600 \text{ m}\left(\frac{5}{6}\right)^3;\ \ldots$

son términos consecutivos de una progresión geométrica indefinida de razón $q = \frac{5}{6} < 1$, luego la suma de *todos* ellos es:

$$S = \frac{600 \text{ m}}{1-\frac{5}{6}} = \frac{600 \text{ m}}{\frac{1}{6}} = 600 \text{ m} \cdot 6 = 3600 \text{ m}.$$

8. En efecto: siendo $2C = C\,(1+0{,}5)^n$ es $2 = 1{,}05^n$

y tomando log de ambos miembros da $\log 2 = n \log 1{,}05$

de donde $$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}5} \cong \frac{0{,}30103}{0{,}02119} \cong 15$$

Sustituyendo este valor en el radicando del radical múltiple dado resulta

$$\sqrt{6-\sqrt{6}-\sqrt{15-6\sqrt{6}}}=\sqrt{6-\sqrt{6}-3+\sqrt{6}}=\sqrt{3}$$

b) Transformando el radical doble

$$\sqrt{6\left(5-\sqrt{21}\right)}=\sqrt{30-\sqrt{756}}$$

con la combinación de signos + y —, teniendo en cuenta que

$$30^2-756=144=12^2$$

da: $$\sqrt{30-\sqrt{756}}=\sqrt{\frac{30+12}{2}}-\sqrt{\frac{30-12}{2}}=\sqrt{21}-3$$

Sustituyendo en el radicando del radical dado, se tiene:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\left[11-\sqrt{21}+6\left(5-\sqrt{21}\right)\right]}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\left[11-\sqrt{21}+\sqrt{21}-3\right]}=\frac{1}{2}\sqrt{3\,.\,4}=\sqrt{3}$$

Paradojas. — 2. — Es falso porque contradice a la primera igualdad que es verdadera y se ha llegado a esa conclusión falsa por haber aplicado a las cantidades, sin saber si era lícito hacerlo, la definición y propiedades de las raíces cuadradas de números. Sólo se ha operado con los coeficientes de los números concretos 1 $ y 100 cts sin tener en cuenta la expresión simbólica de las unidades.

3. Porque no se ha tenido en cuenta que la raíz cuadrada de un número tiene dos valores del mismo valor absoluto y de signo contrario. Debió considerárselos y desechar la solución extraña que conduce a la contradicción apuntada, escribiendo $-a=-(+a)$ resultando verdadero por que $a\neq 0$, por hipótesis.

4. Porque hemos aplicado propiedades de los radicales a expresiones que no lo son por ser raíces cuadradas de números negativos.

5. De no haber tenido en cuenta que $\log\frac{1}{2}$ es negativo y que si se multiplican ambos miembros de una desigualdad por un número negativo se obtiene otra desigualdad de *sentido contrario,* o sea

$$2^{-8}<2^{-4}\quad\therefore\quad 16<256$$

que es un resultado verdadero.

6. Por no haber tenido en cuenta que las propiedades estudiadas para la logaritmación son aplicables a números positivos, únicamente, y que siendo

$$x\neq y\quad\text{es}\quad x\gtrless y\quad\therefore\quad x-y\gtrless 0.$$

Si $x-y$ es negativo no existe su logaritmo en el campo real.

7. Porque $600\text{ m}\,;\ 600\text{ m}\frac{5}{6};\ 600\text{ m}\left(\frac{5}{6}\right)^2;\ 600\text{ m}\left(\frac{5}{6}\right)^3;\ldots$

son términos consecutivos de una progresión geométrica indefinida de razón $q=\frac{5}{6}<1$, luego la suma de *todos* ellos es:

$$S=\frac{600\text{ m}}{1-\frac{5}{6}}=\frac{600\text{ m}}{\frac{1}{6}}=600\text{ m}\,.\,6=3600\text{ m}.$$

8. En efecto: siendo $2C=C\,(1+0{,}5)^n$ es $2=1{,}05^n$

y tomando log de ambos miembros da $\log 2=n\log 1{,}05$

de donde $$n=\frac{\log 2}{\log 1{,}5}\cong\frac{0{,}30103}{0{,}02119}\cong 15$$